الطبعة الثالثة

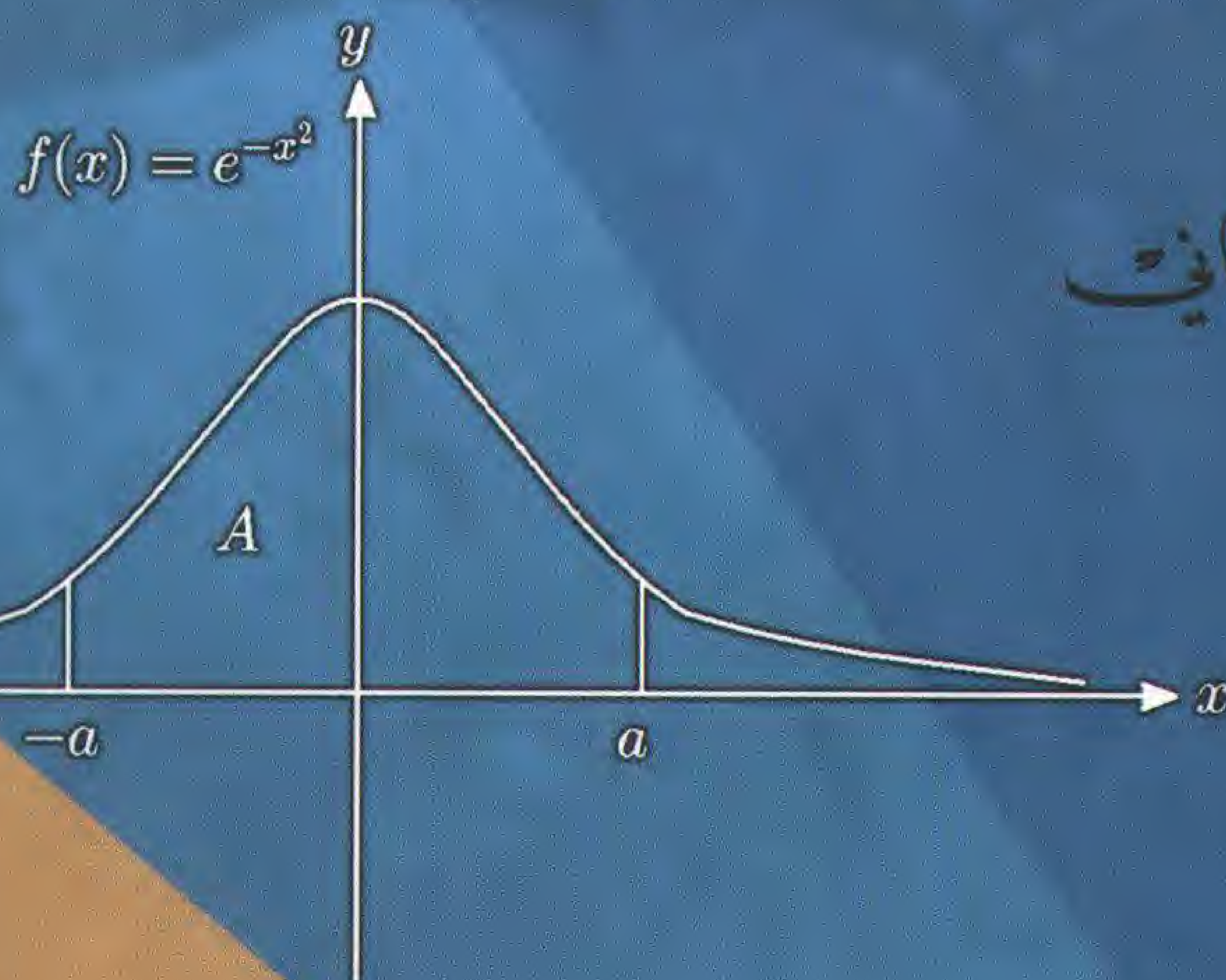
التفاضل والتكامل

تأليف

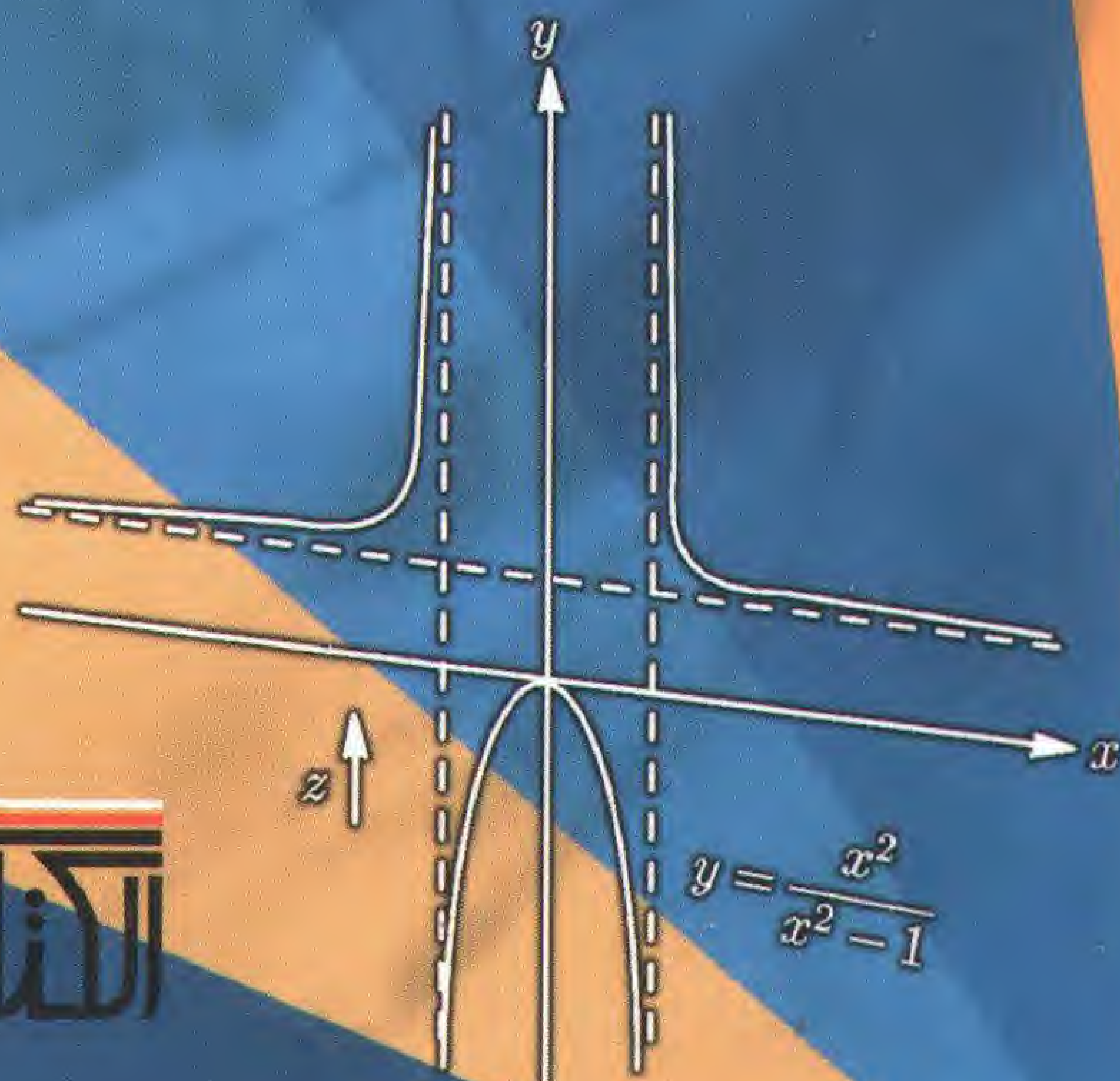
د. رمضان محمد جرهيمة
كلية العلوم - جامعة الفاتح

د. أحمد عبد العالي هب الريح
كلية العلوم بمصراتة - جامعة ناصر

الجزء الثاني



$$A = \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$



الكتاب الجديد

التفاضل والتكامل

تأليف

د. رمضان محمد جهيمة
كلية العلوم - جامعة الفاتح

د. أحمد عبد العالي هب الريح
كلية العلوم بمصراتة - جامعة ناصر

الطبعة الثالثة

الجزء الثاني

دار الكتاب الجديد المتحدة

سبحان الله وبحمده

عدد خلقه ورضا نفسه

وزنة عرشه ومداد كلماته

Mostafamas

المحتويات

الفصل الثاني
التكامل الثنائي

الفصل الثالث
التكامل الثلاثي

الفصل الرابع
المجالات المتجهة والتكامل الخطي

الفصل الخامس
بعض عناصر التفاضل والتكامل المتجه

الفصل السادس
المتتاليات والمتسلسلات اللانهائية

الفصل السابع
بعض عناصر المعادلات التفاضلية العادية

مقدمة الطبعة الثالثة

على الرغم من إضافة الكثير من التمارين والأمثلة إلا أنه تمت المحافظة على المواضيع الرئيسية للكتاب كما في الطبعة الثانية. وفي هذه الطبعة عولجت الأخطاء المطبعية وأضيفت بعض المواضيع والأمثلة.

الأخطاء التي يمكن أن تظهر، تكون مسؤولية المؤلفين ونأمل من الإخوة أعضاء هيئة التدريس الأفاضل والطلبة الكرام موافاتنا بها لأخذها بعين الاعتبار في الطبعة القادمة.

الشكر والتقدير للإخوة/ أعضاء هيئة التدريس بقسمي الرياضيات بكلية العلوم/ جامعة الفاتح وبكلية العلوم مصراتة على اقتراحاتهم البنّاءة التي أخذت بعين الاعتبار، كما نوجّه الشكر والتقدير لمركز المعرفة لخدمات الحاسوب بزليتن على مجهودهم الكبير في عملية الجمع المرئي. وشكرنا الخاص لدار الكتاب الجديد المتحدة للاهتمام والعناية التي خصت بها طباعة هذا الكتاب.

نأمل أن ينال عملنا المتواضع هذا رضا الإخوة ذوي الاختصاص وطلبتنا الكرام.

المؤلفان

1999 /09 /01

مقدمة الطبعة الأولى

يشتمل هذا الكتاب (الجزء الثاني) على مقرر مادة التفاضل والتكامل لطلاب السنة الثانية بقسم الرياضيات والأقسام العلمية الأخرى، ويفترض أن يكون الطالب قد أكمل مقرر المادة نفسها للسنة الأولى في الجزء الأول أو في كتاب آخر مماثل.

ويعتبر هذا الجزء مرسخاً ومتمماً لمادة التفاضل والتكامل التي درسها الطالب في الجزء الأول ومعتمداً كل الاعتماد على النظريات والحقائق، وطرق التكامل التي درسها الطالب في الجزء الأول. ويفترض أيضاً أن يكون الطالب ملماً بها إلماماً جيداً قبل دراسة هذا الجزء. ويعتبر هذا الجزء أساساً لمقررات متقدمة، أي حلقة وصل بين المقررات الأولية والمقررات المتقدمة. وقد تمت مراعاة الصعوبة التي يواجهها الطالب في استيعاب هذا المقرر فتم تقديم أكبر عدد ممكن من الأمثلة المحلولة والجوانب التطبيقية، وقد تمت مراعاة أن تكون المصطلحات العلمية مماثلة للمصطلحات العلمية العربية المتعارف عليها. ولقد ألحقنا بهذا الجزء جدول للمصطلحات العلمية حتى تكون الفائدة أشمل وأعمّ.

في الفصل الأول (التفاضل الجزئي)، تم تقديم مفهوم الدالة في عدة متغيّرات والاتصال، والتفاضل الكلي والتقريب، والتفاضل الكلي في n من المتغيرات والجاكوبيان، ومشتقات وتفاضل دالة الدالة، وقاعدة السلسلة بصورة عامة، والمستوى المماس، والمشتقة المتجهة، ونظرية تيلور للدالة في عدة متغيرات، والقيم القصوى، ومضروبات لاجرانج.

وفي الفصل الثاني (التكامل الثنائي)، تم تعميم فكرة التكامل إلى الدالة في عدة متغيرات. وفي هذا الفصل تم تقديم تعريف التكامل الثنائي، وطرق إيجاده وتغيير المتغيرات في التكامل الثنائي، والإحداثيات القطبية، وتطبيقات على التكامل الثنائي: (الحجم، والمساحة، والكتلة، والعزم).

وفي الفصل الثالث (التكامل الثلاثي)، تمت مناقشة النواحي الأساسية للتكامل الثلاثي وطرق إيجاده وتغيير المتغيرات في التكامل الثلاثي، وقد استخدمت الإحداثيات الأسطوانية والكروية في إيجاد التكامل الثلاثي، والتطبيقات العملية.

وفي الفصل الرابع (التكامل الخطي)، تمت مناقشة الخواص الأساسية للتكامل الخطي والعناصر الأساسية التي يعتمد عليها، واستقلالية التكامل الخطي عن المسار، وطرق اختزال التكامل الخطي إلى التكاملات المعتادة.

وفي الفصل الخامس (بعض عناصر التفاضل والتكامل المتجه)، تمت مناقشة وتوضيح نظريات جرين، والتفرق، وستوكس. وللنظريات المذكورة استخدامات كثيرة: فنظرية جرين تمثل العلاقة بين التكامل الخطي والتكامل الثنائي، ونظرية التفرق وتعرف بنظرية جاوس، وهي من أهم النظريات في التفاضل والتكامل المتجه، وكذلك تمت مناقشة التكامل السطحي ونظرية ستوكس.

وفي الفصل السادس (المتتاليات والمتسلسلات اللانهائية) تم تعريف المتتاليات اللانهائية، ومناقشة تقارب أو تباعد المتتاليات، كما تمت دراسة المتسلسلات اللانهائية، ودراسة تقارب أو تباعد المتسلسلات، والاختبارات المستخدمة في تحديد ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أو متباعدة، والمتسلسلات المتناوبة، والتقارب المطلق، ومتسلسلة القوى، ومتسلسلتا تيلور وماكلورين للدالة في متغير واحد، ومتسلسلة ذات الحدين.

وفي الفصل السابع (بعض عناصر المعادلات التفاضلية)، تم تقديم المفاهيم الأساسية ونظرية الوجود، وطرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى

ومنها فصل المتغيرات، والعوامل التكاملية، والتعويض. وتمت مناقشة معادلة برنولي وطريقة حلها، والمعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية وطريقة اشتقاق المعادلة المميزة أو المساعدة، والصور المختلفة التي يأخذها الحل حسب جذور المعادلة المميزة: (حقيقة مختلفة، ومتكررة، وتخيلية)، وكذلك تمت مناقشة طريقتي اختزال الرتبة وتغايير البارامترات (الوسيطات) لحل المعادلات غير المتجانسة، وطريقة تحويل لابلاس لحل مسائل القيم الابتدائية.

وفي النهاية لا يسعنا إلا أن نتقدّم بجزيل الشكر إلى الدكتور كريم الوائلي في قسم اللغة العربية (كلية الآداب جامعة ناصر) على قراءته للمخطوط وملاحظاته اللغوية القيمة، وإلى الدكتور علي صالح الرويني والدكتور علي محمد إبراهيم في قسم الرياضيات (جامعة الفاتح) على قراءتهما للمخطوط وعلى مراجعتهما العلمية وملاحظاتهما القيمة.

وأخيراً نأمل أن ينال عملنا المتواضع رضى طلبتنا الكرام والإخوة ذوي الاختصاص.

المؤلفان 16/ 9/ 1991

الفصل الأول

التفاضل الجزئي

1 . 1 الدالة في متغيرين أو أكثر

تكتب الدالة في متغير مستقل واحد على الصورة التالية:

$$y = f(x)$$

ولكن في كتير من التطبيقات نجد أنه من الضروري التعبير عن قيمة معينة بدلالة عدة متغيرات مستقلة. على سبيل المثال حجم الأسطوانة الدائرية القائمة يكتب كما يلي:

$$V = \pi r^2 h$$

حيث n، نصف قطر الأسطوانة، وh ارتفاع الأسطوانة، أي أن الحجم V دالة في المتغيرين r وh.

وكمثال آخر، قانون الغازات يكتب على الصورة التالية:

$$PV = nRT$$

حيث أن P = الضغط، و V = الحجم، و T = درجة الحرارة المطلقة، وn = جزيئات الغاز و R = مقدار ثابت. ويمكن كتابة المعادلة السابقة كما يلي:

$$P = \frac{nRT}{V}$$

أي أن الضغط P يكون دالة في ثلاثة متغيرات هي V, T, n.

وسنقدم الآن تعريف دالة القيمة الحقيقية في متغيرين.

تعريف 1:

إذا كانت D فئة جزئية من R^2، فإن دالة القيمة الحقيقية في متغيرين التي يرمز لها بالرمز f تكون عبارة عن قاعدة تعيّن أو تحدّد لكل ثنائي (x, y) في D عدداً حقيقياً وحيداً، ويرمز له بالرمز $f(x, y)$. الفئة D تسمى نطاق (Domain) الدالة f، والفئة $\{f(x, y) : (x, y) \in D\}$، وهي عبارة عن فئة القيم التي تأخذها f، تسمى مدى (Range) الدالة f.

مثـــال 1

ناقش نطاق ومدى الدالة f حيث أن:

$$f(x, y) = x^2 + 5y^2$$

الحــل

واضح أن $D = R^2$ لأن الدالة معرفة في كل الثنائيات المرتبة، وبما أن $x^2 + 5y^2$ موجبة لكل ثنائي حقيقي (x, y)، يتضح أيضاً أن المدى يكون R^+، أي فئة الأعداد الحقيقية غير السالبة.

ملاحظة:

عندما لا يذكر نطاق الدالة f. يكون نطاق الدالة أكبر فئة جزئية من R^2 بشرط أن يكون التعبير $f(x, y)$ ذا معنى أو معرّفاً.

مثـــال 2

أوجد نطاق ومدى الدالة f حيث أن: $f(x,y) = \sqrt{2-x^2-y^2}$

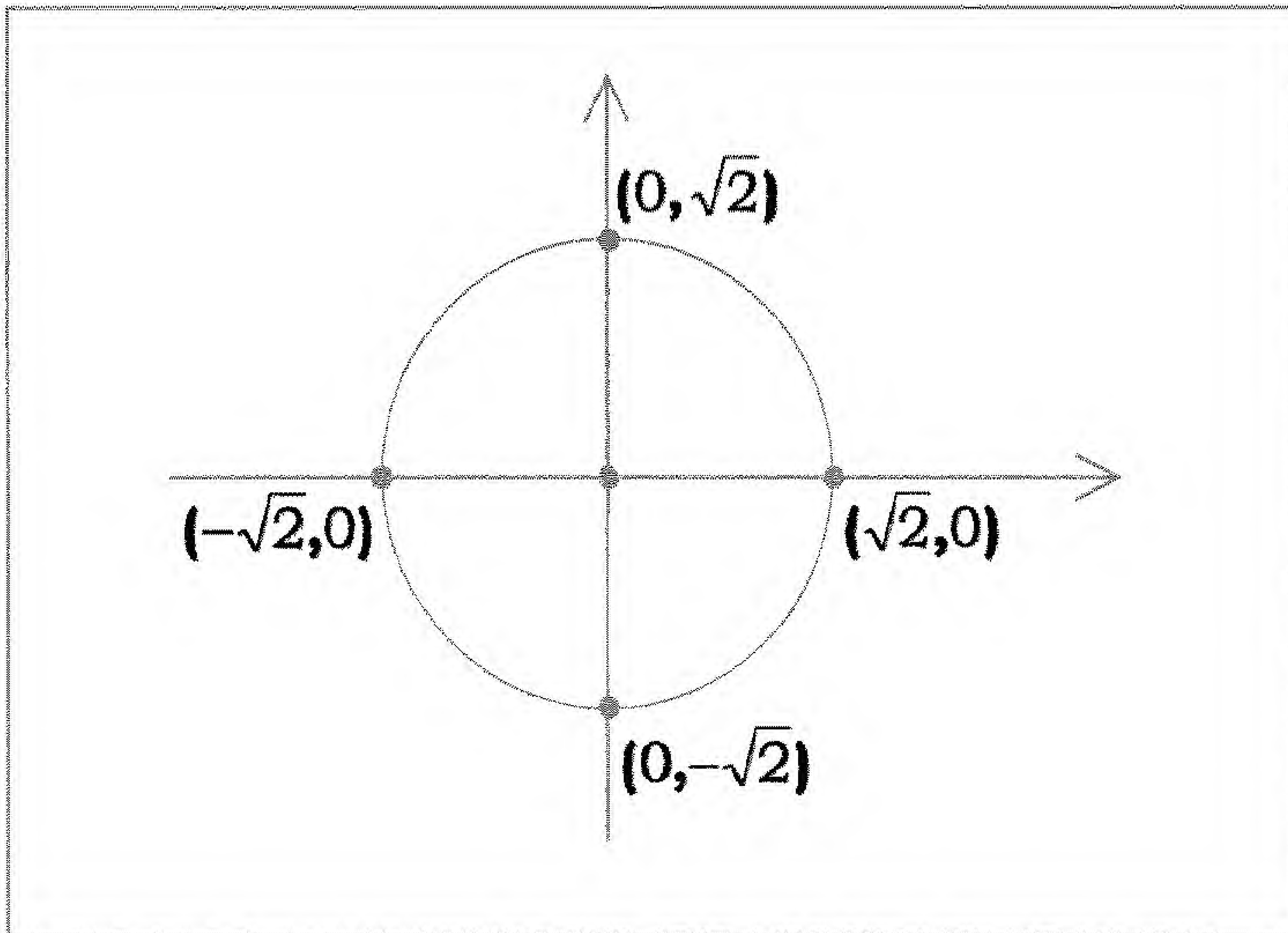
وأوجد قيمة كل من $f(0,1)$، و$f(1,-1)$.

الحـــل

الدالة معرّفة عندما يكون المقدار $2-x^2-y^2$ غير سالب أو $x^2+y^2 \leq 2$

وهذا يتضمن أن النطاق D يكتب كما يلي:

$$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 2\}$$



شكل (1)

وهو عبارة عن قرص (Disc) مركزه نقطة الأصل ونصف قطره $\sqrt{2}$، أنظر الشكل (1)، مدى الدالة يكون الفترة المغلقة: $[0,\sqrt{2}]$. ويمكن حساب كل من $f(0,1)$ و$f(1,-1)$ من التعبير $f(x,y) = \sqrt{2-x^2-y^2}$، أي أن:

$$f(0,1) = \sqrt{2-0-1} = 1$$

و

$$f(1,-1) = \sqrt{2-1-1} = 0$$

ملاحظة

نطاق الدالة f يكون فئة جزئية من R^2 ومدى الدالة f يكون فئة جزئية من R.

مثـــال 3

أوجد نطاق ومدى الدالة f حيث أن:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-4}}{x-2y}$$

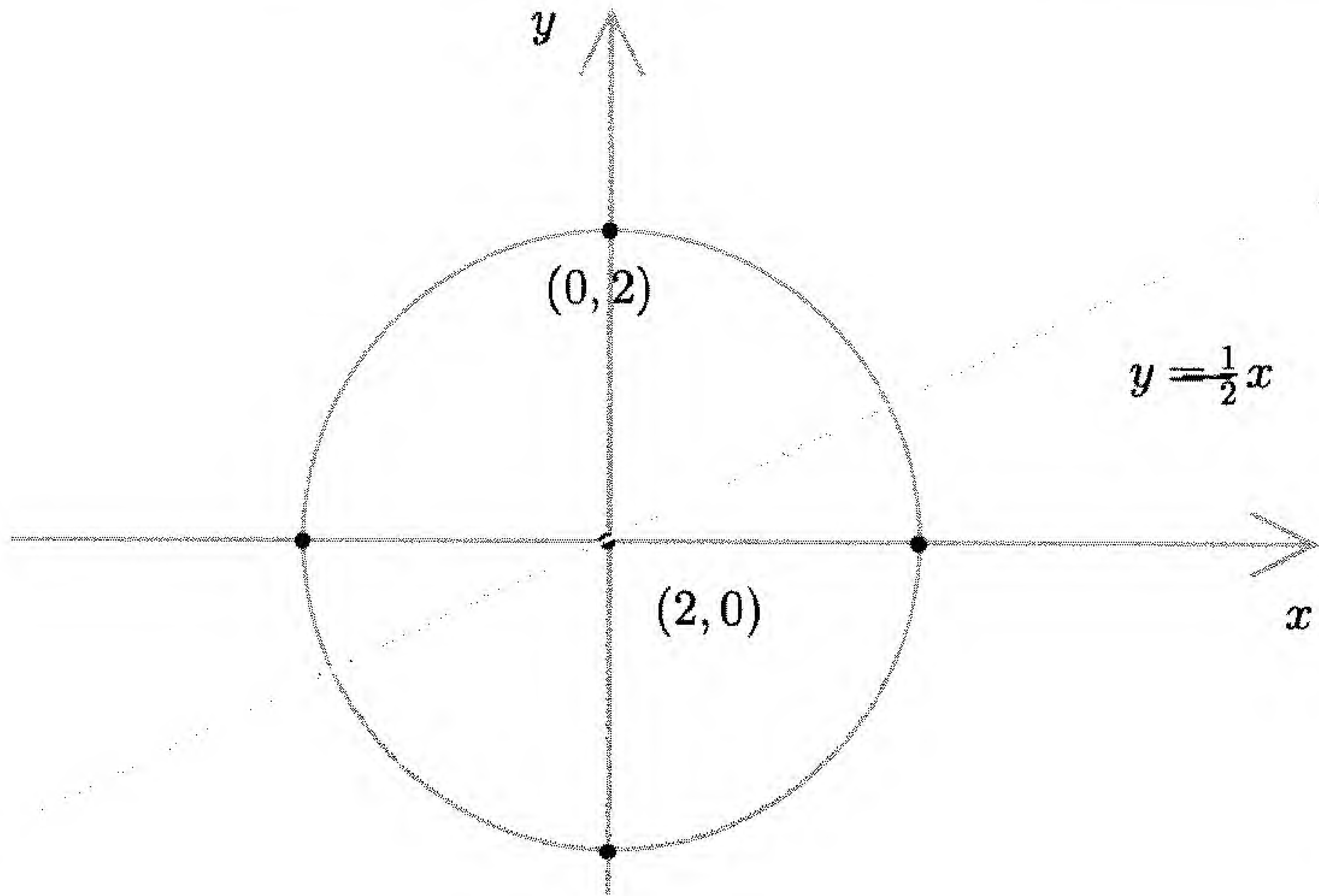
الحـــل

الجذر التربيعي $\sqrt{x^2+y^2-4}$ يكون معرفاً فقط عندما يكون $x^2+y^2-4 \geq 0$ أو $x^2+y^2 \geq 4$ وهذا يمثل كل النقاط التي تقع على الدائرة $x^2+y^2=4$ وخارجها.

كذلك الدالة f غير معرّفة عندما يكون المقدار $x-2y=0$ أو $y=\frac{1}{2}x$، وهكذا يمكن كتابة النطاق D كما يلي:

$$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \geq 4 \ , \ \ y \neq \frac{1}{2}\, x\}$$

ولإيجاد مدى الدالة f نلاحظ أن البسط أو الجذر يكون موجباً، ولكن المقام أو $x-2y$ يمكن أن يكون سالباً (لماذا؟). وهكذا $f(x,y)$ يمكن أن تأخذ أي قيمة حقيقية، أي أن المدى يكون كل فئة الأعداد الحقيقية R.



شكل 2

مثـــال 4

أوجد نطاق ومدى الدالة f حيث أن: $f(x,y) = \arctan (y/x)$

الحـــل

النطاق D يكتب كما يلي:

$$D = \{(x,y) : x \neq 0\}$$

والمدى R يكتب على الصورة التالية:

$$R = (-\frac{\pi}{2} , \frac{\pi}{2})$$

ونترك التفاصيل للقارئ.

تعريف 2 (الدالة في ثلاثة متغيرات)

إذا كانت D فئة جزئية من R^3، فإن دالة القيمة الحقيقية في ثلاثة متغيرات، ويرمز لها بالرمز f، هي عبارة عن قاعدة تحدّد أو تعيّن لكل ثلاثي (x,y,z) في D عدداً حقيقياً وحيداً ويرمز له بالرمز $f(x,y,z)$.

الفئة D تسمى نطاق الدالة f والفئة $\{f(x,y,z):(z,y,z)\in D\}$، وهي فئة القيم الحقيقية التي تأخذها الدالة f، وتسمى مدى الدالة f.

ملاحظة

يستخدم عادة الرمز w للتعبير عن الدالة في ثلاثة متغيرات، أي أن $w=f(x,y,z)$

مثال 5

إذا كانت $w=f(x,y,z)=\sqrt{2-x^2-y^2-z^2}$، فأوجد النطاق والمدى.

الحل

الدالة $f(x,y,z)$ تكون معرّفة إذا كان المقدار $2-x^2-y^2-z^2\geq 0$. وهذا يحدث إذا كان $x^2+y^2+z^2\leq 2$. وهكذا يكون نطاق الدالة فئة كل النقاط في R^3 التي تقع على سطح وداخل الكرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها $\sqrt{2}$، ومدى الدالة f يكون الفترة المغلقة $[0,\ \sqrt{2}]$.

تعريف 3 (رسم الدالة في متغيرين)

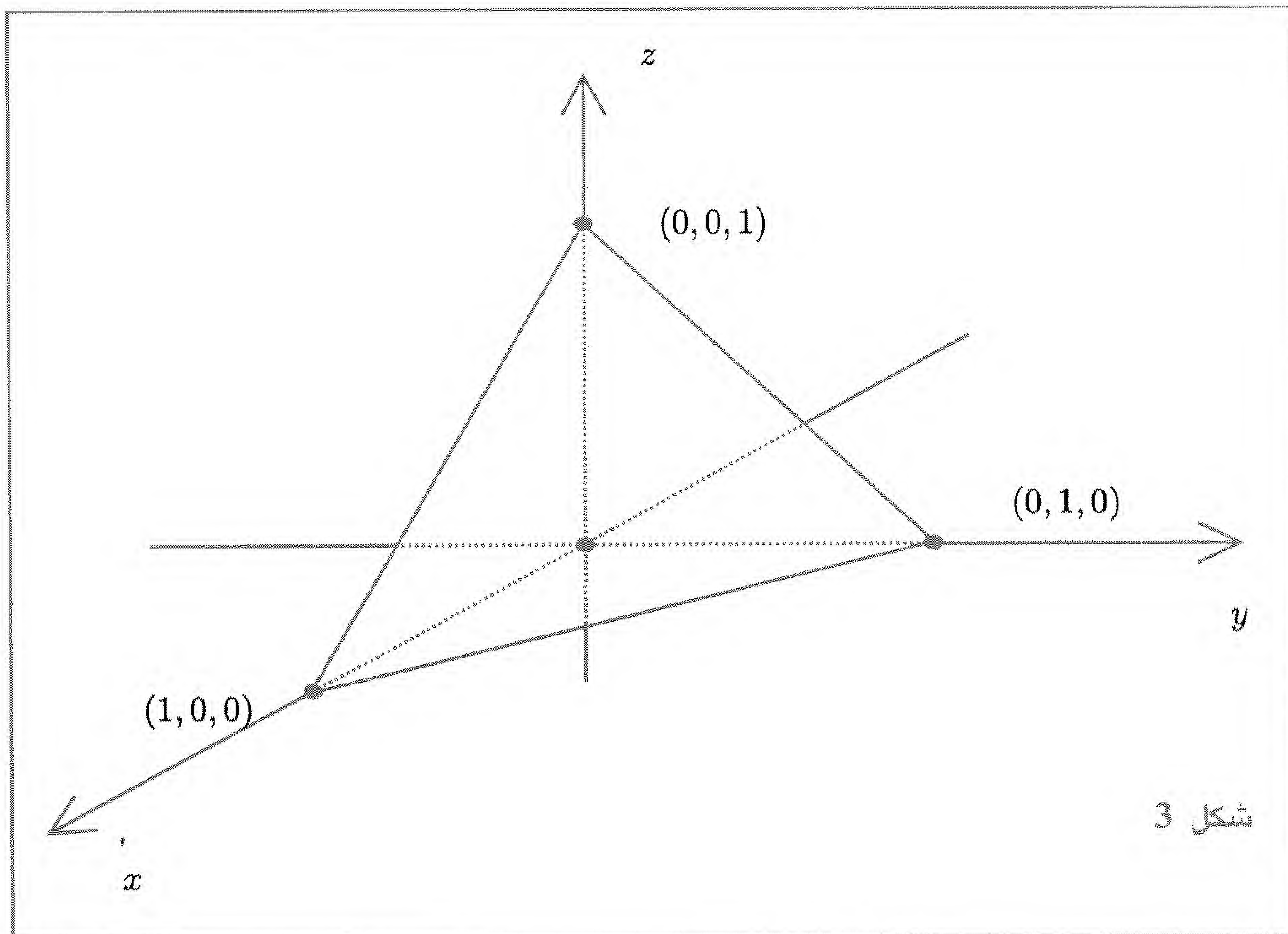
رسم الدالة في المتغيرين x,y يكون فئة كل النقاط (x,y,z) في R^3، حيث أن $Z=f(x,y)$. ويسمى رسم الدالة في متغيرين سطحاً في R^3.

مثال 6

أرسم الدالة $z=2-2x-y$

الحــل

أنظر الشكل 1 . 3.



شكل 3

مثــال 7

أرسم الدالة $z = f(x, y) \;=\; \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

الحــل

لاحظ أن $z \geq 0$ وبتربيع الطرفين نجد أن:

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2$$

و

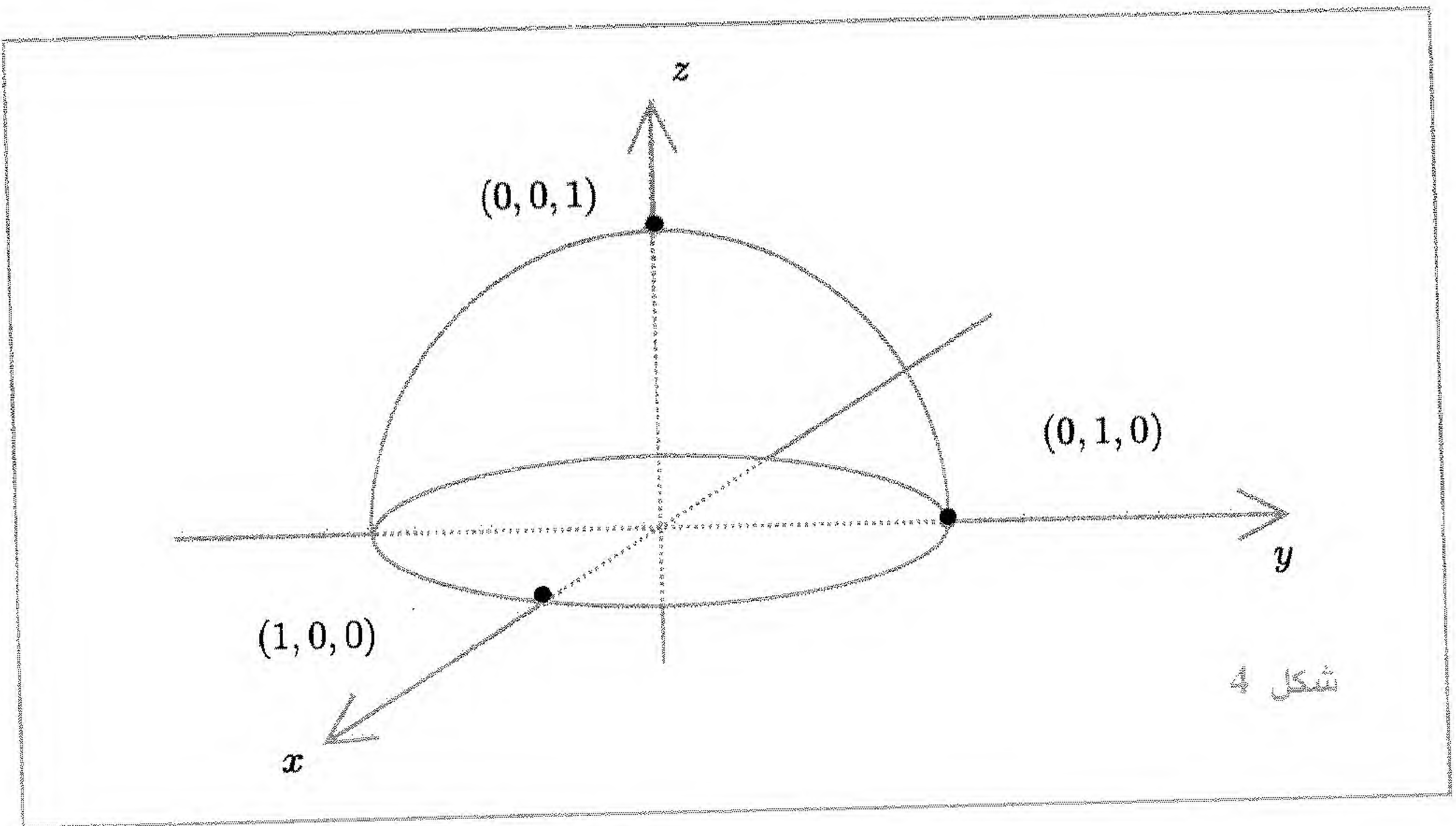
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

وهي معادلة سطح كرة، وبما أن $z \geq 0$، يكون رسم الدالة f عبارة عن نصف

كرة كما يبين الشكل (4).

ملاحظة

يكون من الصعب عادة رسم الدالة $z = f(x,y)$، وليس هناك دليل يشتمل على رسم الدوال يمكن الرجوع إليه. ورسم الدالة في ثلاثة متغيرات ليس بالأمر السهل. ورسم نقاط في الفضاء لا يعطينا فكرة واضحة عن رسم الدالة.



شكل 4

ويمكن اعتبار المقاطع العرضية التي تقع في مستوى موازية للمستويات الإحداثية كما في المثال التالية:

مثـال 8

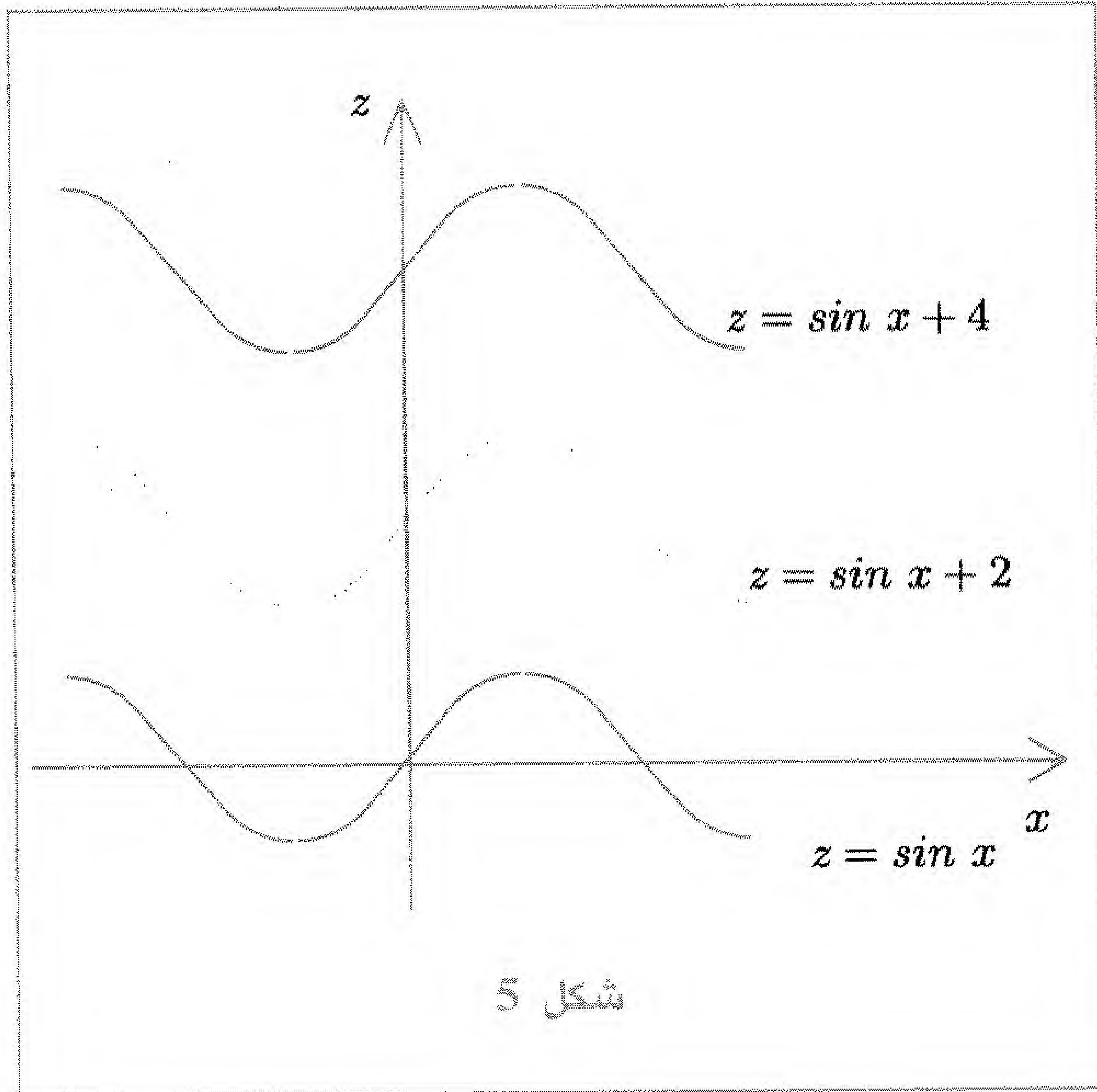
أرسم السطح $z = sin\ x + e^y$

الحـل

المقاطع العرضية التي تقع في مستويات موازية للمستوى $x\ z$ تكون معادلتها على الصورة التالية:

$$z = sin\ x + e^c = sin\ x + c$$

حيث أن $x > 0$

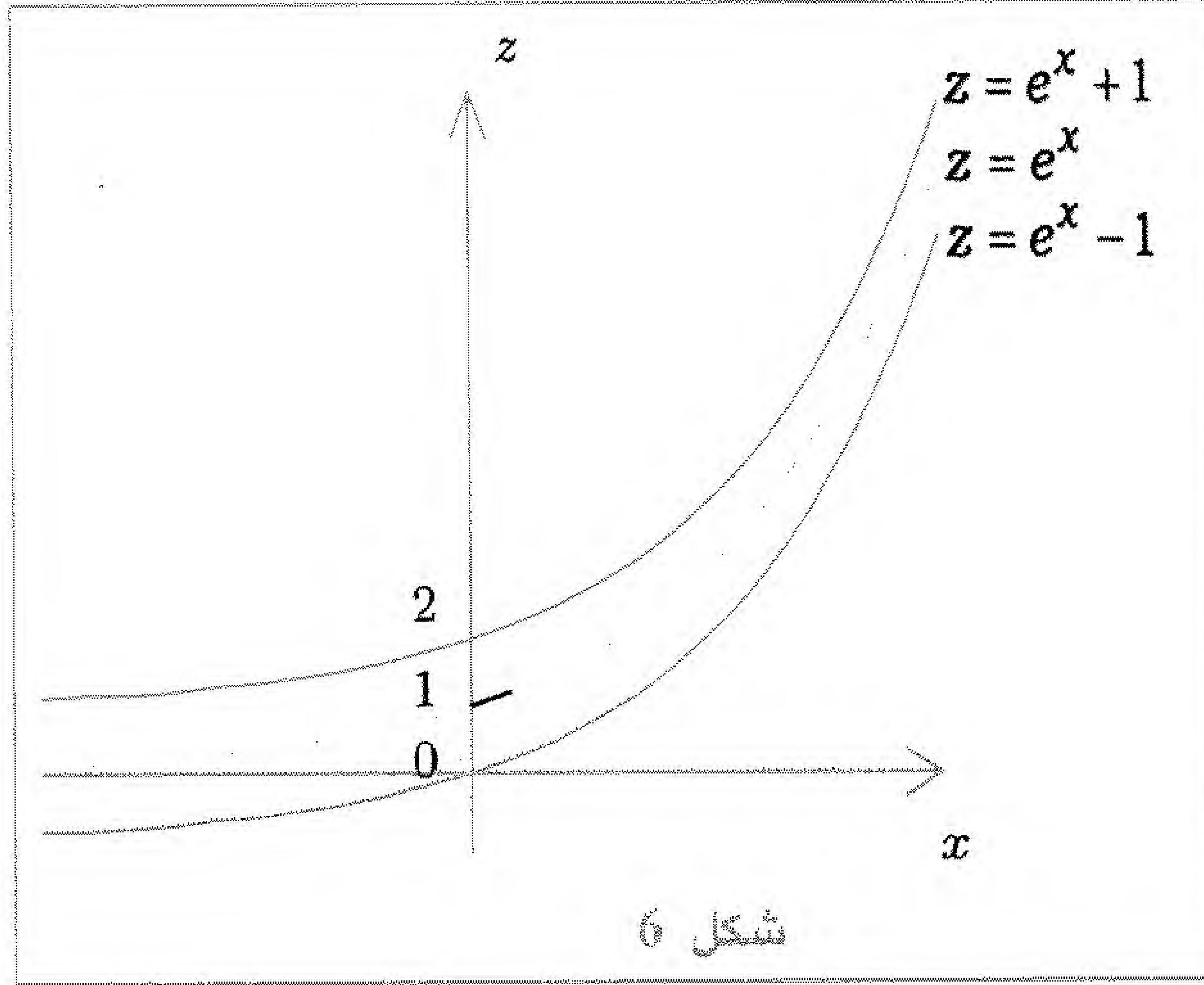


شكل 5

ومعادلة المقاطع التي تقع في المستويات الموازية للمستوى $y\ z$ تكون كما يلي:

$$z = sin\ c + e^y$$
$$= c \quad + e^y$$

حيث أن $-1 \leq c \leq 1$، أنظر الشكل (6).



شكل 6

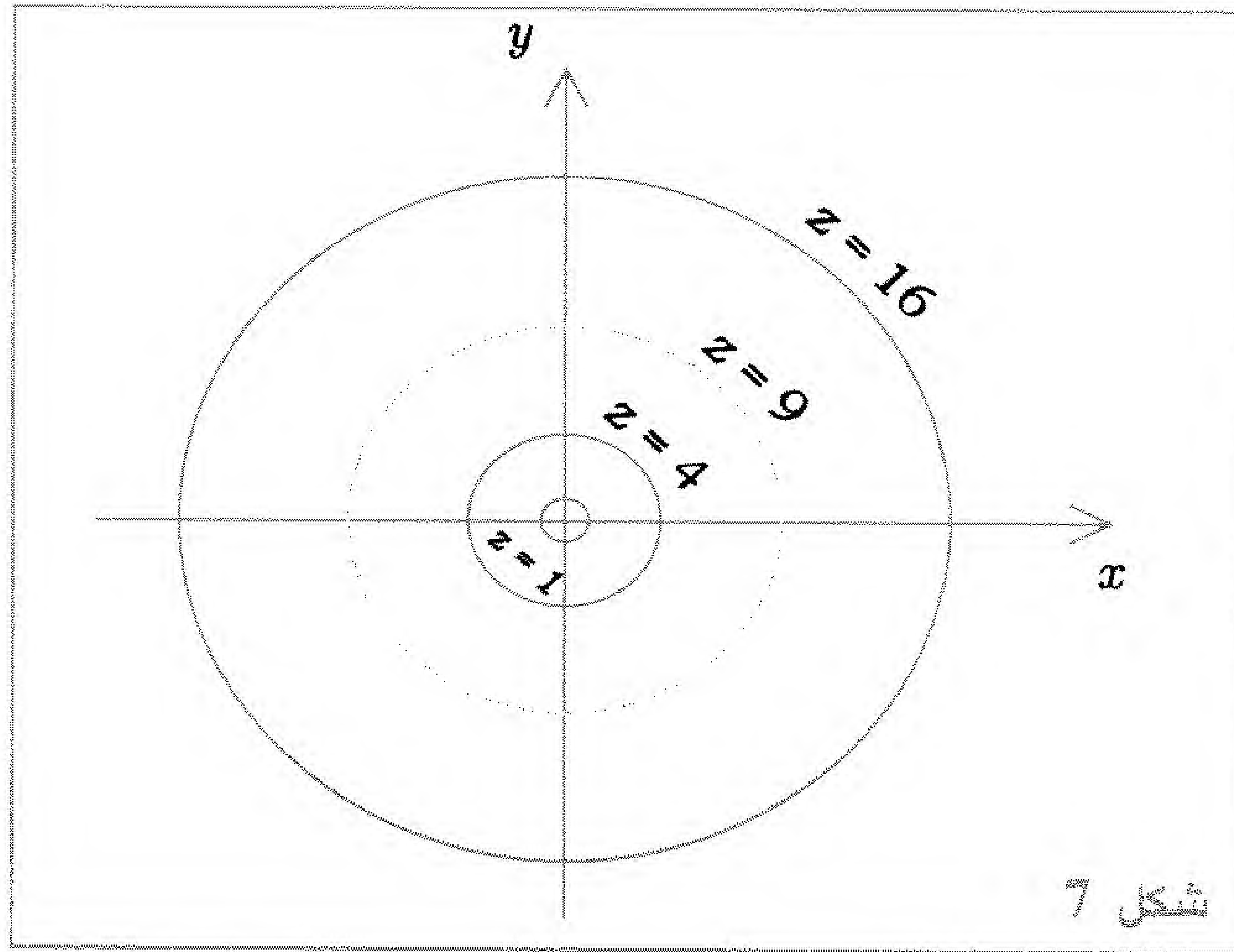
كذلك يمكن رسم منحنيات لتوضيح السطح، فإذا اعتبرنا z مقداراً ثابتاً، فإن المعادلة $z = f(x,y)$ تكون معادلة منحنى في المستوى $x\, y$، ويسمى منحنى مستوى (level curve). ويكون مسقط (projection) تقاطع السطح $z = f(x,y)$ مع المستوى $z = c$ ويمكن توضيح الفكرة بالمثال التالي:

مثـــال 9

أرسم منحنيات المستوى (level curves) للسطح $z = x^2 + y^2$

الحـــل

إذا كانت $z > 0$، فإن $z = a^2$ حيث أن $a > 0$. وهكذا تكون كل المنحنيات عبارة عن دوائر: $x^2 + y^2 = a^2$، ويمكن اعتبار a ارتفاع النقاط على المنحنى المعين. وكل منحنى يشتمل على مسقط شريحة (slice) من الرسم الحقيقي للسطح، أي رسم الدالة في الفضاء. أي أن كل دائرة تعتبر مسقطاً لجزء من السطح في الفضاء على المستوى xy، أنظر الشكل (7).



شكل 7

وتوجد بعض التطبيقات المهمة لمنحنيات المستوى (level curves)، ونخص بالذكر ما يلي:

1) إذا كانت $T(x,y)$ ترمز إلى درجة الحرارة عند النقطة (x,y) في المستوى xy، فإن منحنيات $T(x,y)=C$ تسمى منحنيات تساوي الحرارة (isothermal curves). أي أنه يكون لكل النقاط على المنحنى الواحد نفس درجة الحرارة.

2) إذا كانت $V(x,y)$ تمثل الجهد الكهربائي (voltage) عند نقطة في المستوى xy، فإن منحنيات المستوى $V(x,y)=C$ تسمى منحنيات تساوي الجهد (equipotential curves)، ويكون لكل النقاط على المنحنى المستوى نفس الجهد الكهربائي.

3) وإذا كانت $P(x,y)$ تمثل الربح، فإن $P(x,y)=C$ تمثل منحنيات الربح الثابت (constant profit curves)، أي أن النقاط على منحنى معين تعطي نفس الربح.

تمارين 1.1

أوجد النطاق والمدى للدوال التالية:

(1) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ (2) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}$

(3) $f(x,y) = cos^{-1}(x-y)$ (4) $f(x,y) = \dfrac{y}{|x|}$

(5) $f(x,y) = \left(\dfrac{x}{2y}\right) + \left(\dfrac{2y}{x}\right)$ (6) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2-y^2-z^2}}$

أرسم الدوال التالية:

(9) $z = 2x^2 + 3y^2$ (10) $y = x^2 + 3z^2$

(11) $z = \sqrt{x^2 + 4y^2 + 4}$ (12) $z = x^2 - 4y^2$

(13) $y = \sqrt{x^2 - 4z^2 + 4}$

(14) إذا كانت T تمثّل درجة الحرارة في المستوى حيث أن:

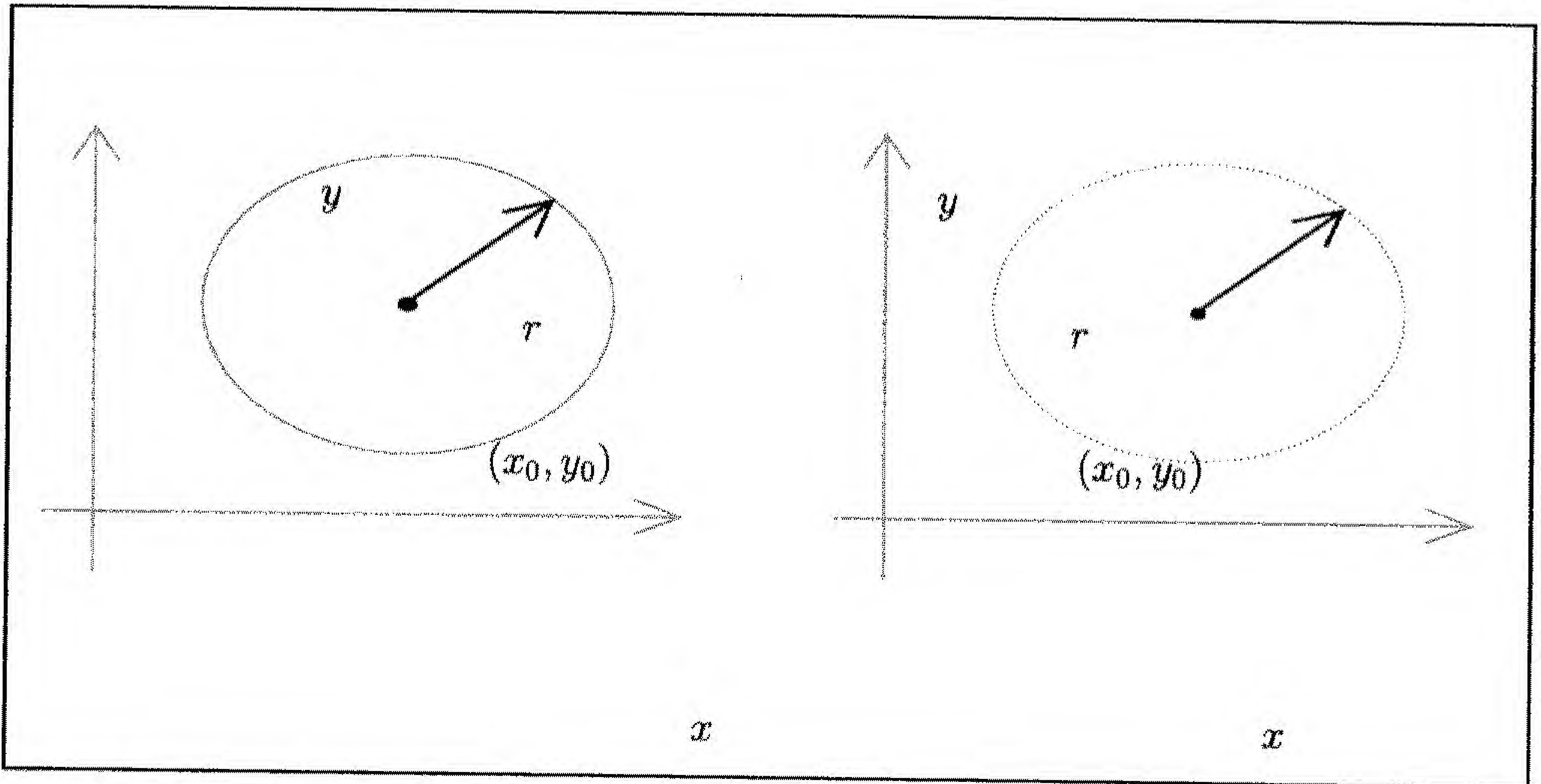
$$T(x,y) = 20 + x^2 + 4y^2$$

أرسم منحنيات تساوي درجة الحرارة لكل من $T = 50$، و$t = 60$، و$T = 70$

(15) إذا كانت $V = \sqrt{1 - 4x^2 - 9y^2}$ تمثل الجهد الكهربائي على صفيحة معدنية في المستوى xy، أرسم منحنيات تساوي الجهد لكل من $V = 1.5$، و$V = 0.5$، و$V = 0.25$.

2 . 1 النهايات والاتصال (Limits and continuity)

في هذا البند سنناقش الأفكار الأساسية للنهايات والاتصال للدالة في متغيرين وثلاثة متغيرات، وكما رأينا في (الجزء الأول) أهمية الفترة المفتوحة، والفترة المغلقة في تعريف النهايات والاتصال. وكمثال x تكون قريبة من x_0 إذا كانت $|x - x_0|$ صغيرة جداً أو إذا كانت x موجودة في فترة صغيرة ومفتوحة (جوار) مركزها عند x_0 ومن المشوق أن نرى كيف يمكن تعميم هذه الأفكار إلى R^2 أو R^3.



شكل (9) (قرص مغلق)　　　شكل (8) (قرص مفتوح)

إذا كانت النقطة (x_0, y_0) في R^2، فماذا تعني المعادلة:

$$\left|(x, y) - (x_0, y_0)\right| = r \qquad (1)$$

وبما أن (x, y)، و(x_0, y_0) متجهان في R^2، فإن

$$\left|(x, y) - (x_0, y_0)\right| = \left|x - y_0), (x - y_0)\right|$$

$$= \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \qquad (2)$$

ومن (2) وبالتعويض في (1) وتربيع الطرفين نجد أن:

$$(x-x_0)+(y-y_0)^2=r^2 \qquad (3)$$

وهي معادلة دائرة مركزها (x_0, y_0) ونصف قطرها r، وفئة النقاط التي تحقق المتباينة:

$$\left|(x,y)-(x_0,y_0)\right|<r \qquad (4)$$

تكون فئة كل النقاط في R^2 وتقع داخل الدائرة (3)، أنظر الشكل (8).

وبالطريقة نفسها، المتباينة:

$$\left|x,y)-(x_0,y_0)\right|\leq r \qquad (5)$$

تصف فئة كل النقاط التي تقع على وداخل الدائرة (3)، أنظر الشكل (9).

والآن يمكن تقديم التعريف التالي:

تعريف 4:

(1) القرص المفتوح (open disc) الذي مركزه عند النقطة (x_0, y_0) ونصف قطره r يكون فئة جزئية من R^2 ويعرف كما يلي:

$$\{(x,y):\left|(x,y)-(x_0,y_0)\right|<r\}$$

(2) القرص المغلق (closed disc) الذي مركزه عند النقطة (x_0, y_0) ونصف قطره r يكون فئة جزئية من R^2 ويعرّف كما يلي:

$$\{(x,y):\left|(x,y)-(x_0,y_0)\right|\leq r\}$$

(3) حدود (boundary) القرص المفتوح أو المغلق تكون الدائرة:

$$\{(x,y):\left|(x,y)-(x_0,y_0)\right|=r\}$$

(4) جوار (neighborhood) النقطة (x_0, y_0) في R^2 يكون القرص المفتوح الذي مركزه عند (x_0, y_0).

ملاحظة

(أ) الفترة المفتوحة لا تشتمل على نقطتي النهاية، كذلك القرص المفتوح لا يشتمل على أي نقطة من النقاط التي تقع على حدوده.

(ب) الفترة المغلقة تشتمل على نقطتي النهاية، كذلك القرص المغلق يشتمل على كل نقاطه الحدية.

والآن يمكننا إدراك تعريف نهاية الدالة في متغيرين:

الدالة $f(x,y)$ تؤول إلى النهاية L عندما النقطة (x,y) تؤول إلى (x_0,y_0) إذا كانت $f(x,y)$ تقترب جداً من L عندما (x,y) تقترب من (x_0,y_0) على أي مسار (أي منحنى يصل بين (x,y) و(x_0,y_0)). والآن نقدم تعريف النهاية بالضبط (precisely).

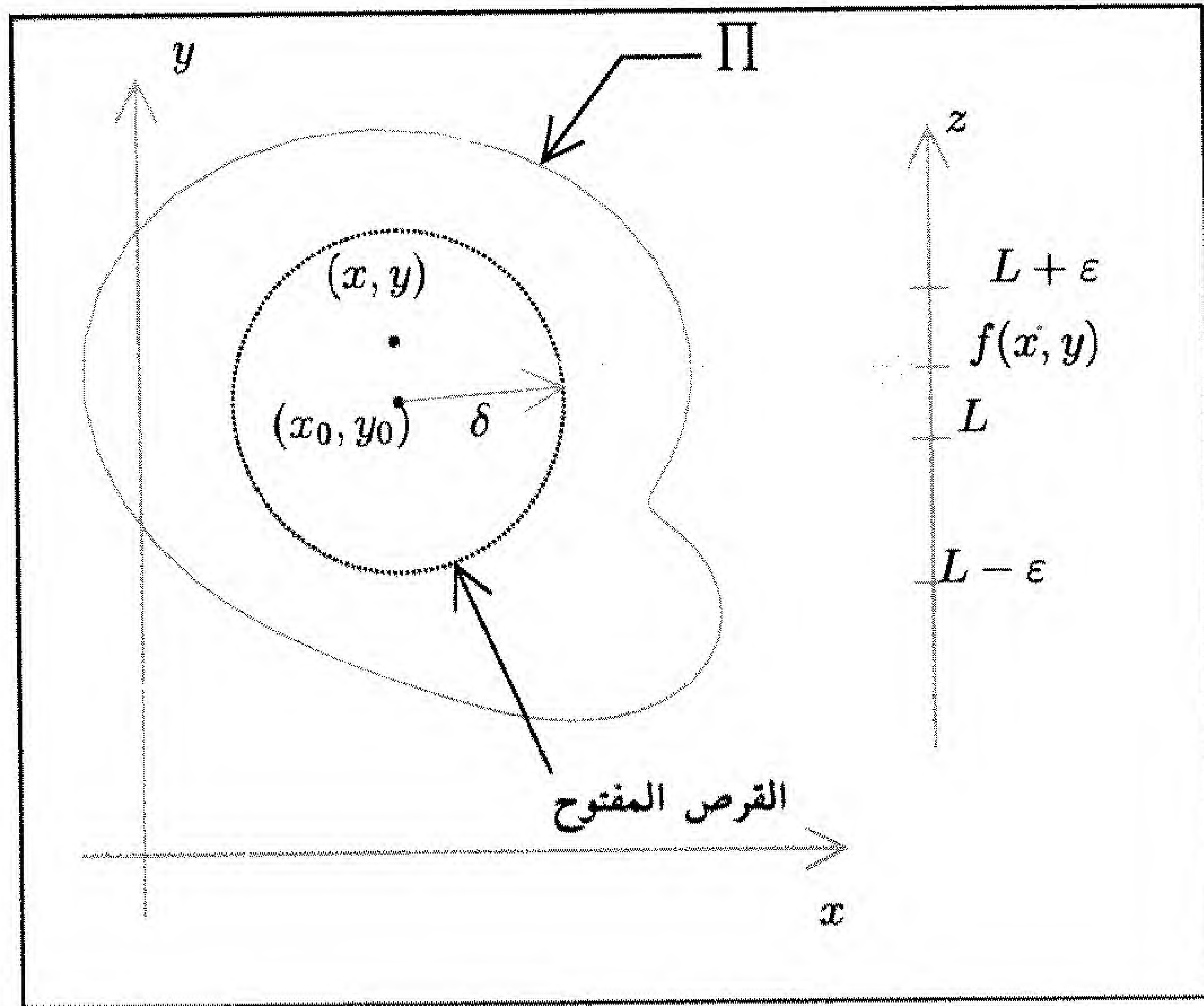
تعريف 5 (النهاية)

إذا كانت الدالة $f(x,y)$ معرفة في جوار النقطة (x_0,y_0) وليس بالضرورة أن تكون معرفة عند النقطة نفسها، فإن نهاية الدالة $f(x,y)$ عندما (x,y) تؤول إلى (x_0,y_0) تكون القيمة الحقيقية L، وتكتب كما يلي:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

وهذا يعني:

إذا كان لكل $0 < \varepsilon$ يوجد العدد $0 < \delta$ حيث أن $|f(x,y) - L| < \varepsilon$ لكل $(x,y) \neq (x_0,y_0)$ في القرص المفتوح الذي مركزه عند (x_0,y_0) ونصف قطره δ.
أنظر الشكل 1.10.



شكل (10)

ملاحظة

يمكن تعميم نهاية مجموع وحاصل ضرب وخارج قسمة دالتين في متغير واحد إلى الدالة في متغيرين.

إذا كانت $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ ، و$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$ موجودتين فإن:

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(\tilde{x}) = \lim_{x\to x_0} f(\tilde{x}) + \lim_{x\to x_0} g(\tilde{x}) \quad (1)$$

$$\lim_{x\to x_0}(f-g)(\tilde{x}) = \lim_{x\to x_0} f(\tilde{x}) - \lim_{x\to x_0} g(\tilde{x}) \quad (2)$$

$$\lim_{x\to x_0}(f.\ g)(\tilde{x}) = \left(\lim_{x\to x_0} f(\tilde{x})\right)\left(\lim_{x\to x_0} g(\tilde{x})\right) \quad (3)$$

$$\lim_{x\to x_0}(f/g)(\tilde{x}) = \left(\lim_{x\to x_0} f(\tilde{x})\right)/\left(\lim_{x\to x_0} g(\tilde{x})\right) \quad (4)$$

بشرط $\lim\limits_{x\to x_0} g(\tilde{x}) \neq 0$

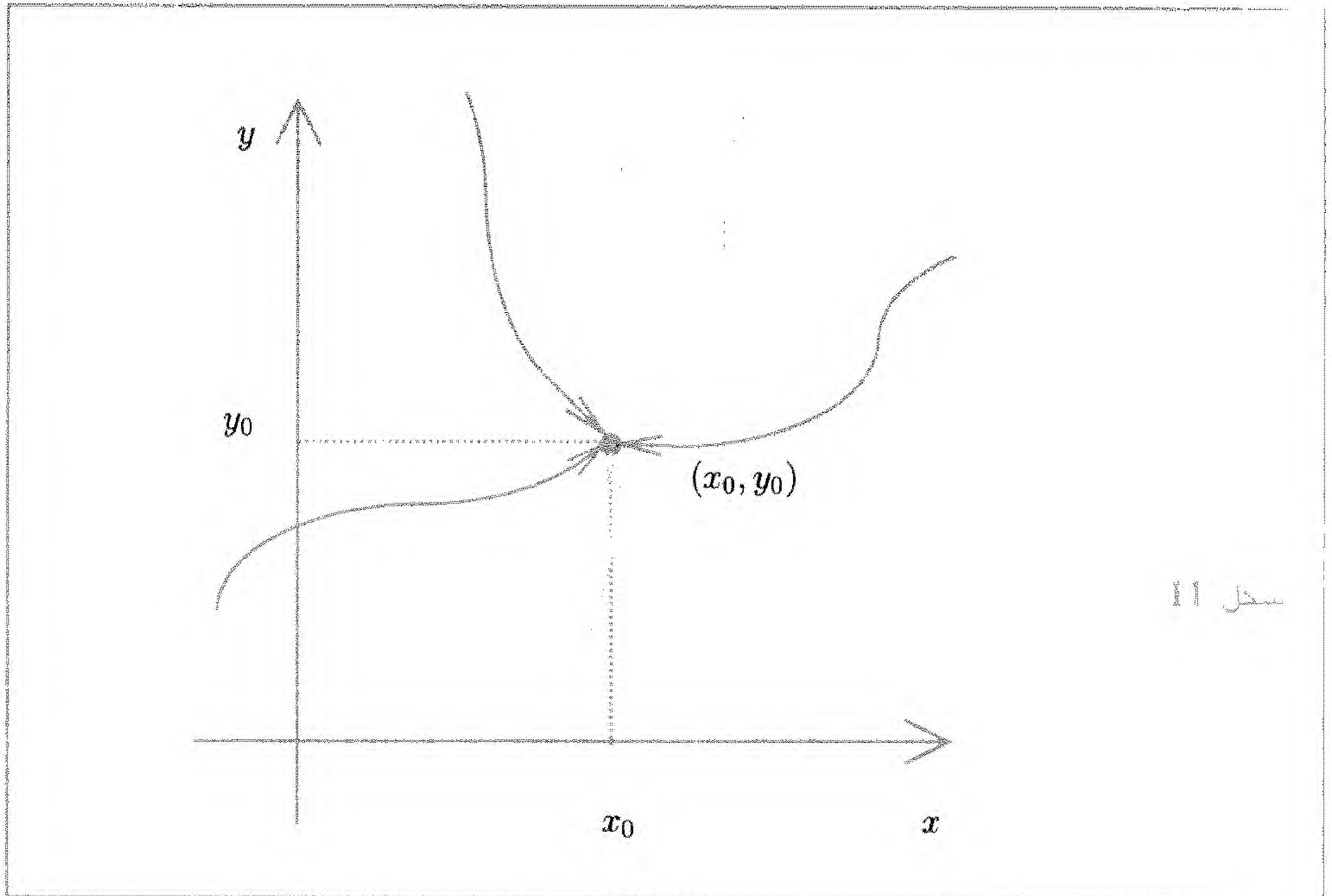
حيث $\tilde{x} = (x, y)$ و $\tilde{0} = (x_0, y_0)$

شرط وجود النهاية للدالة في متغير واحد يكون:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

أي أن النهاية $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ تكون موجودة إذا كانت النهاية من الجانبين لـ x_0 متساوية.

في R^2 الحالة تكون أكثر تعقيداً لأن النقطة (x, y) يمكن أن تؤول إلى (x_0, y_0) ليس على مسارين فقط ولكن على عدد لانهائي من المسارات، أنظر الشكل (11).



شكل 11

وإذا كانت النهاية موجودة، فإن الدالة $f(x, y)$ يكون لها النهاية نفسها بغض النظر عن المسار الذي تسلكه النقطة (x, y)، وهذا يوضح أهمية النظرية التالية:

نظرية 1 (قاعدة عدم وجود النهاية)

إذا وجدت قيمتان مختلفتان أو أكثر لنهاية الدالة f عندما تؤول النقطة (x, y) إلى النقطة (x_0, y_0) على مسارات مختلفة، فإن:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$$

تكون غير موجودة.

ملاحظة: **(العكس غير صحيح).**

تعريف 6 الاتصال (Continuity)

(1) إذا كانت الدالة $f(x, y)$ معرفة عند كل نقطة (x, y) في جوار النقطة (x_0, y_0) فإن f تكون متصلة (continuous) إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

(أ) $f(x_0, y_0)$ موجودة.

(ب) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ موجودة.

(ج) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

(2) إذا لم يتحقق أي شرط من (أ، ب، ج)، فإن الدالة تكون غير متصلة (discontinuous) عند (x_0, y_0).

(3) الدالة f تكون متصلة في الفئة S إذا كانت f متصلة عند كل نقطة (x, y) في S حيث أن $S \subseteq R^2$.

ملاحظة

يمكن تعميم كل التعريفات في هذا البند إلى الدالة في ثلاثة متغيرات أو أكثر مع ملاحظة أن القرص المفتوح في R^2 تناظره كرة مفتوحة (open ball) في R^3 أو $\left\{(x,y,z):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<r^2\right\}$

كذلك القرص المغلق في R^2 تناظره كرة مغلقة في R^3

أو $\left\{(x,y,z):(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leq r^2\right\}$

نظرية 2

(1) إذا كانت $P(x,y)$ أي متعددة حدود فإنها متصلة عند كل نقطة في R^2.

(2) كل دالة قياسية $r(\bar{x})=P(\bar{x})/q(\bar{x})$ تكون متصلة عند كل نقطة في R^2 حيث أن $q(x)\neq 0$.

(3) إذا كانت الدالتان g, f متصلتين عند $\bar{x}_0$، فإن $f+g$، و$f.g$ تكون متصلة عند x_0.

(4) إذا كانت الدالتان g, f متصلتين، وإذا كانت $g(\bar{x}_0)\neq 0$، فإن $(f/g)(\bar{x}_0)$ تكون متصلة.

(5) إذا كانت f متصلة عند $\bar{x}_0$ وإذا كانت h دالة في متغير واحد ومتصلة عند $f(\bar{x}_0)$، فإن دالة الدالة $h\circ f$ المعرفة كما يلي: $(h\circ f)=h(f(\bar{x}))$ $h\circ f$

تكون متصلة عند x_0 حيث أن $\bar{x}=(x,y)$ و $\bar{x}_0=(x_0,y_0)$

مثـــال 1

برهن على ما يأتي:

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} (5x+3y) = 19$$

الحـــل

نفرض أنه يوجد $\varepsilon > 0$، إذن المطلوب اختيار $\delta > 0$ حيث أن:

$|5x+3y-19| < \varepsilon$ إذا كان $0 < \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} < \delta$

ونبدأ بكتابة:

$$|5x+3y-19| = |5x-10+3y-9|$$

$$\le 5|x-2| + 3|y-3| \qquad (1)$$

ولكن $|x-2| = \sqrt{(x-2)^2} \le \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$

و $|y-3| = \sqrt{(y-2)^2} \le \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$

وبالتعويض عن $|x-2|$ و $|y-3|$ في (1) نجد أن:

$$|5x+3y-19| \le 5\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} + 3\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$$

$$\le 8\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} < 8\,\delta = 8\left(\frac{\varepsilon}{8}\right) = \varepsilon$$

مثـــال 2

برهن على أن

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = 0$$

الحل

واضح أن النهاية تساوي الصفر على أي مسار يمر بنقطة الأصل، ولكنه غير كاف ويجب الاعتماد على التعريف.

نفرض أنه يوجد $\varepsilon > 0$ ويجب أن نبين أنه توجد $\delta > 0$ حيث أن:

إذا كان $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$، فإن $\left|f(x,y)\right| = \left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right| < \varepsilon$

ولكن $|x| \le \sqrt{x^2+y^2}$، و $y^2 \le x^2+y^2$

وهكذا

$$\left|f(x,y)\right| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \le \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\,(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

إذن إذا اخترنا $\varepsilon = \delta$، فإن:

$$\left|f(x,y)\right| \le \varepsilon$$

مثال 3

أوجد قيمة النهايات التالية إذا كانت موجودة وبين السبب إذا كان غير ذلك.

(أ) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x^2+2xy^2+y^4}{x+y^2}$ (ب) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(2,1,1)} \frac{2x^2y-xz^2}{y^2-xz}$

(ج) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x^3+2x^2y-xy-2y^2}{x+2y}$

الحل

أ) لاحظ أن البسط مربع كامل أي أن:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x^2+2xy+y^4}{x_y^2} = \lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(x+y^2)^2}{x+y^2} = \lim_{(x,y)\to(-1,1)} x+y^2$$
$$= -1 + 1 = 0$$

ب) بالتعويض مباشرة نجد أن:

$$\lim_{(x,y,z)\to(2,1,-1)} \frac{2x^2y - yz^2}{y^2 - xz} = \frac{8-2}{3} = 2$$

ج) يمكن كتابة الدالة كما يأتي:

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x^2(x+2y) - y(x+2y)}{x+2y}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(2,-1)} (x^2 - y) = 4 + 1 = 5$$

مثـــال 4

بين أن $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ غير موجودة.

الحــل

بأخذ المسار $y = 0$ أي محور x:

الدالة $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ تختزل إلى $\frac{x^2}{x^2} = 1$

وبذلك $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1$

وبأخذ المسار $x = 0$ أي محور y:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

وبما أن نهاية الدالة مختلفة، إذن النهاية غير موجودة.

مثـــال 5

ناقش النهاية التالية:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

الحـــل

بأخذ المسار $y=x$ نجد أن:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{2x^2} = 0 \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{2} = 0$$

وبأخذ المسار $y=x^2$ نجد أن:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+x^4}\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{1+x^2} = 0\end{aligned}$$

حاول أخذ مسارات أخرى. ماذا تستنتج؟

لو أخذنا عدة مسارات نجد أن قيمة النهاية صفر، ولكن هذا لا يبرهن على وجود النهاية لأنه توجد مسارات لانهائية كما ذكرنا من قبل ويمكن استخدام الإحداثيات القطبية في هذه المسألة.

$$y = rsin\theta, x = rcos\theta \quad \text{حيث} \quad r \geq 0$$

وبالتعويض في الدالة المذكورة نجد أن:

$$\frac{x^2y}{x^2+y^2} = \frac{(r^2\ cos^2\theta)(r\ sin\theta)}{(r^2\ cos^2\theta + r^2\ sin^2\theta)} = r\ sin\theta\ cos^2\theta$$

وعندما تؤول النقطة (x,y) إلى $(0,0)$ فإن r تؤول إلى الصفر وبذلك

$$\lim_{r \to 0} r\ sin\theta\ cos^2\theta\ =\ 0$$

أي أن النهاية موجودة وتساوي الصفر.

مثـــال 6

ناقش اتصال الدالة f حيث أن:

$$f(x,y)\ =\ \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^3+y^3} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y)\ =\ (0,0) \end{cases}$$

الحـــل

باستخدام الإحداثيات القطبية نجد أن:

$$f(r,\theta)\ = \frac{(r\ cos\theta)(r^2\ sin^2\theta)}{r^3(cos^3\theta + sin^3\theta)}\ =\ \frac{cos\theta sin^2\theta}{cos^3\theta + sin^3\theta}$$

أي أن النهاية غير موجودة. لأنها لا تشتمل على r.

وبذلك تكون الدال غير متصلة عند نقطة الأصل.

مثـــال 7

أوجد $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-2)} \frac{x+y}{x^2+2y}$

الحـــل

بالتعويض المباشر نجد أن قيمة النهاية $\frac{0}{0}$ وهي كمية غير معرفة.

نأخذ المسار $y=-2$

$$\lim_{(x,y)\to(2,-2)} \frac{x+y}{x^2+2y} = \lim_{(x,y)\to(2,-2)} \frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(2,-2)} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

وبأخذ المسار $x = 2$

$$\lim_{(x,y)\to(2,-2)} \frac{2+y}{4+2y} = \frac{1}{2}$$

إذن النهاية غير موجودة.

ملاحظة

معظم الدوال الابتدائية والتي تشمل الدوال الجبرية، المثلثية، اللوغاريتمية والأسية تكون متصلة، إلا إذا كان المقام يساوي صفراً أو إذا كانت الدالة غير معرفة.

النهايات المتكررة (Iterated Limits)

النهايتان المتكررتان المناظرتان لنهاية الدالة $f(x,y)$ عندما النقطة (x,y) تؤول إلى (a,b) هما:

$$\lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x,y) \quad , \quad \lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x,y)$$

وإذا كانت النهايتان المتكررتان غير متساويتين أو إحداهما غير معرفة، فإن النهاية $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ غير موجودة. وتساوي النهايتين المتكررتين لا يضمن وجود النهاية $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ ولكن إذا كانت النهاية الأخيرة موجودة فإن النهايتين المتكررتين متساويتان.

ملاحظة

توجد ست نهايات متكررة مناظرة لنهاية الدالة $f(x,y,z)$.

مثـــال 8

إذا كانـت $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$، فـأوجـد $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$، $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ و $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

الحـــل

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = \lim_{x\to 0} = 0$$

وبالطريقة نفسها

$$,\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

وباستخدام الإحداثيات القطبية نجد أن:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xt}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0}\frac{r^2 cos\theta\sin\theta}{r^2} = cos\theta\ sin\theta$$

إذن النهاية غير موجودة.

تمارين 2.1

1) عبر عن الدوال التالية بالصورة القطبية. وبيّن إذا كانت نهاية كل دالة موجودة عندما تؤول النقطة (x,y) إلى $(0,0)$ وبيّن السبب إذا كانت غير ذلك.

أ) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

ب) $f(x,y) = \dfrac{-x^2}{x^2+y^2}$

ج) $w(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

د) $h(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^4+y^4}$

أوجد النهايات التالية إذا كانت موجودة وبيّن السبب إذا كانت غير ذلك.

2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0.5)} \frac{x^3-x^2y-2xy^2+xy^3-2y^4}{x^2-4y^2}$

3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{5x^4+2y^4}$

4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-x^2y+xy^2-y^3}{x^2+y^2}$

5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\,\ell n(x^2+y^2)$

6) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{1-\cos(x\,y\,z)}{x\,y\,z}$

7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x\,y}{x\,y}$

9) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x}{y^2e^{x/y}}$

10) إذا كانت

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^{12}+y^4} & ; \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

فبين أن الدالة f غير متصلة عند نقطة الأصل.

11) ناقش اتصال الدالة

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{sin\ xy}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ناقش النهايات التالية:

(12 $$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-2x-y+2}{x^2+y^2-2x-4y+5}$$

(13 $$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$$

(14 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

(15 $$\lim_{(x,y)\to(-32,32)} \left(x^{0.4}-y^{0.4}\right)\left(x^{0.2}-y^{0.2}\right)^{-1}$$

(16 $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+ye^{-x^2}}{1+y^2}$$

3 . 3 المشتقات الجزئية

إذا كانت f دالة في المتغيرين x و y وإذا كانت x متغايرة فقط وy مثبتة وإذا كان للدالة f مشتقة فإنها تسمى مشتقة جزئية لـ f بالنسبة للمتغير x.

تعريف 7

إذا كانت الدالة $f(x,y)$ معرفة في المنطقة $\Omega \subseteq R^2$ الواقعة في المستوى $x\ y$ عند النقطة (x,y) في المنطقة Ω. تعرف المشتقتان الجزئيتان كما يأتي:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x, y) - f(x,y)}{\triangle x}$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x, y+\triangle y) - f(x,y)}{\triangle y}$$

وتعرف مشتقات الدالة في ثلاثة متغيرات أو أكثر بطريقة مشابهة.

المشتقات الجزئية من رتب عليا

إذا كان للدالة في عدة متغيرات مشتقات جزئية أولى، فإن هذه المشتقات والتي تعتبر دوال في عدة متغيرات أيضاً يمكن أن يكون لها مشتقات جزئية أولى. وهذه المشتقات تسمى مشتقات جزئية من الرتبة الثانية للدالة الأصلية، أو المشتقات الثانية ويرمز لها كما يأتي:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f_x(x+\triangle x, y) - f_x(x,y)}{\triangle x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f_x(x, y+\triangle y) - f_x(x,y)}{\triangle y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f_y(x+\triangle x, y) - f_y(x,y)}{\triangle x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f_y(x, y+\triangle y) - f_y(x,y)}{\triangle y}$$

المشتقات الجزئية من الرتبة الثالثة أو أكثر للدالة في عدة متغيرات تعرف ويرمز لها بالطريقة نفسها.

المشتقات الجزئية التي يتكون فيها أكثر من متغير مستقل في عملية التفاضل تسمى مشتقات جزئية مختلطة مثل f_{xy} وf_{yx}.

مثـال 1

إذا كانت $f(x,y) = xy^2 + x^2y + 3$، فأوجد f_x وf_y باستخدام التعريف.

الحـل

$$\begin{aligned}
f_x &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(f+\triangle x, y) - f(x,y)}{\triangle x} \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{(x+\triangle x)y^2 + (x+\triangle x)^2 y + 3 - xy^2 - x^2y - 3}{\triangle x} \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle x y^2 + 2x(\triangle x)y + (\triangle x)^2 y}{\triangle x} \\
&= \lim_{\triangle x \to 0} (y^2 + 2xy + \triangle x y) \\
&= y^2 + 2xy
\end{aligned}$$

ويترك إيجاد المشتقة f_y كتمرين للقارئ.

ملاحظة

قواعد تفاضل: حاصل ضرب دالتين، دالة الدالة، والدالة القياسية تعتبر صحيحة في المشتقات الجزئية كما يتضح من الأمثلة التالية:

مثال 2

إذا كانت $f(x,y) = x\ y\ e^{x^2+y^2}$ ، فأوجد f_x وf_y .

الحل

$$f_x = ye^{x^2+y^2} + x\ y\ e^{x^2+y^2}\ (2x)$$

$$= (1+2x^2)\ y\ e^{x^2+y^2}$$

$$f_y = x\ e^{x^2+y^2}\ +\ x\ y\ e^{x^2+y^2}\ (2y)$$

$$= (1+2y^2)\ x\ e^{x^2+y^2}$$

مثال 3

أوجد f_x وf_y إذا كان $f(x,y) = e^{sin(y/x)}$ حيث $x \neq o$.

الحل

$$f_x = e^{sin(y/x)}\ cos\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{y}{x^2}\ cos\ \left(\frac{y}{x}\right)\ e^{sin(y/x)}$$

ويترك إيجاد f_y كتمرين للقارئ.

مثـــال 4

بيّن أن المعادلة التفاضلية التالية تامة.

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

حيث أن:

$$P(x,y) = ye^{xy}(cos\ xy - sin\ xy) + cos\ x$$

$$Q(x,y) = (cos\ xy - sin\ xy)xe^{xy} + sin\ y$$

الحـــل

المعادلة التفاضلية تكون تامة إذا كان $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y}$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (e^{xy} + xye^{xy})(cos\ xy - sin\ xy) + ye^{xy}(-x\ sin\ xy - x\ cos\ xy)$$

وبعد تجميع الحدود المتشابهة نجد أن

$$\frac{\partial P}{\partial y} = (cos\ xy - sin\ xy - 2xy\ sin\ xy)e^{xy} \qquad (1)$$

كذلك

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = (e^{xy} + xye^{xy})(cos\ xy - sin\ xy) + xe^{xy}(-y\ sin\ xy - y\ cos\ xy)$$

وبعد تجميع الحدود المتشابهة نحصل على:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^{xy}(cos\ xy - sin\ xy - 2xy\ sin\ xy) \qquad (2)$$

من (1) و(2) نستنتج أن المعادلة التفاضلية تامة.

مثـــال 5

إذا كان $f(x,y) = x^{xy}$، فأوجد f_x وf_y عند النقطة $(2,2)$.

الحـــل

لإيجاد f_x نستخدم اللوغاريتمات

$$ln\ f(x,y) = xy\ lnx$$

بتفاضل الطرفين بالنسبة للمتغير x

$$\left(\frac{1}{f(x,y)}\right) f_x = y\ ln\ x + (xy)\left(\frac{1}{x}\right) = y\ ln + y$$

ومنها $f_x = x^{xy}(y\ ln\ x + y)$

وعند النقطة $(2,2)$ نجد أن:

$$f_x(2,2) = 2^4(2\ ln\ 2 + 2)$$

$$= 2^5(ln\ 2 + 1)$$

كذلك $f_y = x^{xy}(ln\ x)(x) = x^{xy+1}\ ln\ x$

وعند النقطة $(2,2)$ نجد أن:

$$f_x(2,2) = 2^5 ln\ 2$$

مثـــال 6

إذا كان $f(x,y) = xy^4 - 2x^2y^5 + 4x^6 - 3y^2$، فبين أن $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$

الحـــل

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^4 - 4xy^5 + 24x^5$$

وبذلك

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 4y^3 - 20xy^4$$

$$= 4y^3(1 - 5xy) \qquad (1)$$

ولإيجاد f_{yx} نوجد f_y أولاً

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4xy^3 - 10x^2y^4 - 6y$$

وبذلك

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 4y^3 - 20xy^4$$

$$= 4y^3(1-5xy) \qquad (2)$$

من (1) و(2) نجد أن:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

نظرية 3

إذا كانت الدوال $f(x,y), f_x, f_y$ موجودة في المنطقة Ω والمشتقة الجزئية المختلطة f_{xy} موجودة في المنطقة R ومتصلة عند النقطة (a,b) في Ω. فإن المشتقة الجزئية المختلطة f_{yx} موجودة عند النقطة (a,b) وتساوي f_{xy} عند النقطة نفسها.

(يترك البرهان كتمرين).

المشتقات الجزئية الضمنية

إذا أمكن إيجاد أحد المتغيرات، بدلالة المتغيرات الأخرى من المعادلة التي تحدد العلاقة بين المتغيرات المعنية، فإنه يمكن تحديد دالة أو أكثر من العلاقة، مثال ذلك، المعادلة:

$$x^2 + 3y^2 + z^2 - 10 = 0$$

يمكن إيجاد z بدلالة المتغيرين x وy أي أن:

$$x = \pm\sqrt{10 - x^2 - 3y^2}$$

وإذا كان من الممكن إيجاد دالة أو أكثر من العلاقة التي تربط بين

المتغيرات، فإنه من الممكن حساب المشتقات الجزئية ضمنياً بطريقة مشابهة للتفاضل الضمني المعتاد للدالة في متغير واحد.

مثال 7

إذا كانت $z,\ y, x$ متغيرات وz دالة في y, x وتحقق المعادلة:

$$x^3 + y^3 + 3xyz = 5$$

فأوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$

الحل

نعتبر y ثابتاً ونوجد المشتقة $\frac{\partial z}{\partial x}$ ضمنياً.

$$3x^2 + 3yz + 3xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

وهذا يتضمن:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{3x^2 + 3yz}{3xy} \\ &= -\frac{x^2 + yz}{xy} \end{aligned}$$

ويترك إيجاد المشتقة $\frac{\partial z}{\partial y}$ كتمرين للقارئ.

مثال 8

اوجد $\frac{\partial w}{\partial x}$ و $\frac{\partial w}{\partial y}$ حيث أن:

$$e^{xyw} sin(xy)\ cos(2xw) - 4y^3 = 0$$

الحــل

لكي نوجد $\frac{\partial w}{\partial x}$، نعتبر w المتغير التابع، x المتغير المستقل، y مقداراً ثابتاً.

وبعد إجراء عملية التفاضل نجد أن:

$$e^{xyw}\left(yw + xy\frac{\partial w}{\partial x}\right)sin(xy)cos(2xw) + e^{xyw}\big(cos(xy)\big)(y)cos(2xw)$$

$$+e^{xyw}(sin\ xy)(-sin(2xw))\ \left(2w + 2x\ \frac{\partial w}{\partial x}\right)\ =\ 0$$

ويمكن أن تكتب المعادلة السابقة كما يأتي:

$$[xy\ sin(xy)\ cos(2xw) - 2x\ sin(xy)\ sin(2xw)]\ \frac{\partial w}{\partial x} =$$

$$2w\ sin(xy)sin(2xw) - y\ cos(xy)cos(2xw) - yw\ sin(xy)cos(2xw)$$

وليس من الصعب على القارئ أن يبين:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2w\ tan(2xw) - y\ cot(xy) - yw}{x\big(y - 2\ tan(2xw)\big)}$$

والمشتقة الجزئية $\frac{\partial w}{\partial y}$ توجد بالطريقة نفسها.

مثــال 9

إذا كان $f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}$، فأوجد f_y, f_x وبيّن نطاق كل منهما.

الحــل

$$f_x = \frac{(x^2 + y^2)(3x^2y - y^3) - (x^3y - xy^3)(2x)}{(x^2 + y^2)^2}$$

ويمكن أن يختصر المقدار السابق إلى $f_x = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}$

واضح أن نطاق الدالة f_x هو فئة كل الثنائيات المرتبة ما عدا نقطة الأصل، وبطريقة مشابهة نجد أن:

$$f_y = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

كذلك f_y في R^2 ما عدا نقطة الأصل.

مثال 10

إذا كانت

$$f(x,y = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

فبين أن:

أ) $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

ب) $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$

الحل

أ) واضح من المثال السابق أن f_y, f_x غير معرفتين عند نقطة الأصل ولكن في هذا المثال يمكن إيجادهما باستخدام التعريف، أي أن:

$$f_x(x,y) \;=\; \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x, y) - f(x,y)}{\triangle x}$$

وعند نقطة الأصل نجد أن:

$$\begin{aligned} f_x(0,0) \;&=\; \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(\triangle x, 0) - f(0,0)}{\triangle x} \\ &=\; \lim_{\triangle x \to 0} \frac{0-0}{\triangle x} \;=\; 0 \end{aligned}$$

وبطريقة مماثلة نجد أن:

$$f_y(0,0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(0,\triangle y) - f(0,0)}{\triangle y}$$
$$= \lim_{\triangle y \to 0} \frac{0-0}{\triangle y} = 0$$

ب) من المثال السابق واضح أن:

$$f_x(0,y) = \frac{-y^5}{y^4} = -y \quad ; \quad y \neq 0$$

و

$$f_y(x,0) = \frac{x^5}{x^4} = x \quad ; \quad x \neq 0$$

وباستخدام التعريف مرة أخرى:

$$f_{xy}(x,y) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f_x(x,y+\triangle y) - f_x(x,y)}{\triangle y}$$

وهكذا

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{-\triangle y - 0}{\triangle y} = -1 \qquad (1)$$

وبالطريقة نفسها نجد أن:

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle x}{\triangle x} = 1 \qquad (2)$$

من (1) و(2) نستنتج أن $f_{xy} \neq f_{yx}$ عند نقطة الأصل.

مثـال 11

أوجد كل المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة f حيث أن:

$$f(x,y) = sin\ (xy^2) + ln\ \frac{x}{y}$$

الحـل

لكي نحصل على المشتقات الجزئية الثانية يجب إيجاد f_x وf_y:

$$f_x = \left(cos(xy^2)\right)(y)^2 + \frac{1}{x}$$

$$= y^2 cos\ (xy^2)\ +\ \frac{1}{x}$$

و

$$f_y\ =\ \left(cos(xy^2)\right)\ (2xy)\ -\ \frac{1}{y}$$

$$=\ 2xy\ cos\ (xy^2)\ -\ \frac{1}{y}$$

ونحصل على المشتقات الجزئية الثانية كما يأتي:

$$f_{xx} = -y^2\left(sin(xy^2)\right)(y)^2\ -\ \frac{1}{x^2}$$

$$= -y^4\ sin(xy^2)\ -\ \frac{1}{x^2}$$

و

$$f_{yy}\ =\ 2x\ cos(xy^2) - 2xy\left(sin(xy^2)\right)(2xy)\ -\ \frac{1}{y^2}$$

$$= 2x\ cos(xy^2)\ -\ 4x^2y^2\ sin(xy^2)\ -\ \frac{1}{y^2}$$

و

$$(f_y)_x = 2y\ cos(xy^2) - y^2\left(sin(zxy^2)\right)(2xy)$$

$$= 2y\ cos(xy^2) - 2xy^3\ sin(xy^2)$$

و

$$(f_x)_y = 2y\ cos(xy^2) - xy^2\left(sin(xy^2)\right)(y^2)$$

$$= 2y\ cos(xy^2) - 2xy^3\ sin(xy^2)$$

تمارين 3.1

أوجد f_x وf_y في المسائل التالية:

1) $f(x,y)=cos(xe^y)$

2) $f(x,y)=arcsin\frac{x}{1+y}$

3) $f(x,y)=ln\sqrt{x^2+y^2}$

4) $f(x,y)=e^{sin\,x}tan\,xz$

5) $f(x,y)=(x-y)sin(x+y)$

6) $f(x,y)arctan\frac{y}{x}$

أوجد f_x, f_y وf_z في المسائل التالية:

7) $f(x,y,z)=e^{xyz}sin\,xy\,cos\,2xz$

8) $f(x,y,z)=\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

9) $f(x,y,z)=arcsin\frac{1}{1+xyz^2}$

أوجد المشتقات الجزئية الأولى عند النقطة المعطاة في كل حالة:

10) $f(x,y,z)=e^{2x-4y-z}$ عند النقطة $(0,-1,1)$

11) $f(x,y,z)=xy^2\,sin\,z$ عند النقطة $(-1,2,0)$

12)
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^3}{x^2+4y^2} & ; \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ; \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

أوجد f_x وf_y حيث أن:

13) $f(x,y)=\int_1^x P(t)dt+\int_1^y Q(t)dt$

14) $f(x,y)=\int_\pi^{x^2+y^2} sin\,t^2dt$

15) أوجد $f_y(0,1)$ حيث أن:

$$f(x,y)=(sin\,x)(y^{xy-sin\,y})e^{cos\,y}+\ ln(1+x^2)cos(x+1)^y$$

أوجد المشتقات الجزئية الموضحة في كل حالة:

16) $w-e^{w\,sin(y/x)}$، المشتقتان $\frac{\partial w}{\partial x}$ و$\frac{\partial w}{\partial y}$

17) $w^2 - 3xw - ln\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$، المشتقتان $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ ، $\dfrac{\partial w}{\partial y}$

18) $xyz + x^2z + xzw - yzw + yz^2 - w^2 = 3$، المشتقات الجزئية $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ ، $\dfrac{\partial w}{\partial y}$ ، $\dfrac{\partial w}{\partial z}$.

19) إذا كانت $w = (y-2x)^3 - \sqrt{y-2x}$، فبين أن: $w_{xx} - 4w_{yy} = 0$

4.1 التفاضل الكلي والتقريب

تفاضل الدالة في متغير واحد يكون دالة في متغيرين هما $\triangle x$، x، وإذا كان $y = f(x)$، فإن الكمية df تسمى تفاضل الدالة f ويعرف بالعلاقة التالية:

$$df = f'(x)\triangle x$$

حيث أن $\triangle x$ و x متغيران مستقلان.

ويعرف تفاضل الدالة في متغيرين كما يأتي:

تعريف 8

التفاضل الكلي للدالة $f(x,y)$ هو الدالة df في أربعة متغيرات: $\triangle y, \triangle x, y, x$ ويكتب كما يأتي:

$$df = f_x(x,y)\triangle x + f_y(x,y)\triangle y$$

وإذا كانت f دالة في ثلاثة متغيرات z, y, x فإن التفاضل الكلي للدالة f هو دالة في ستة متغيرات هي $\triangle z, \triangle y, \triangle x, z, y, x$ ويكتب كما يأتي:

$$df = f_x\triangle x + f_y\triangle y + f_z\triangle z$$

ويعرف الفرق بين قيمتي الدالة عند نقطتين متقاربتين كما يأتي:

$$\triangle f = f(x + \triangle x, y + \triangle y) - f(x,y)$$

ويعرف الفرق للدالة في ثلاثة متغيرات بصورة مماثلة:

$$\triangle f = f(x + \triangle x, y + \triangle y, z + \triangle z) - f(x,y,z)$$

وتحدد العلاقة بين الفرق $\triangle f$ والتفاضل df من النظرية التالية:

نظرية 3

إذا كانت الدالة f في المتغيرين x وy متصلة. وإذا كانت f_x وf_y متصلتين عند النقطة (x_0, y_0). فإنه توجد دالتان $G_1(\triangle x, \triangle y)$ و$G_2(\triangle x, \triangle y)$ متصلتان عند النقطة (x_0, y_0) و$G_1(0,0) = G_2(0,0) = 0$ حيث أن:

$$\triangle f = f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\triangle x + f_y(x_0, y_0)\triangle y$$
$$+G_1(\triangle x, \triangle y)\triangle x + G_2(\triangle x, \triangle y)\triangle y$$

البرهان

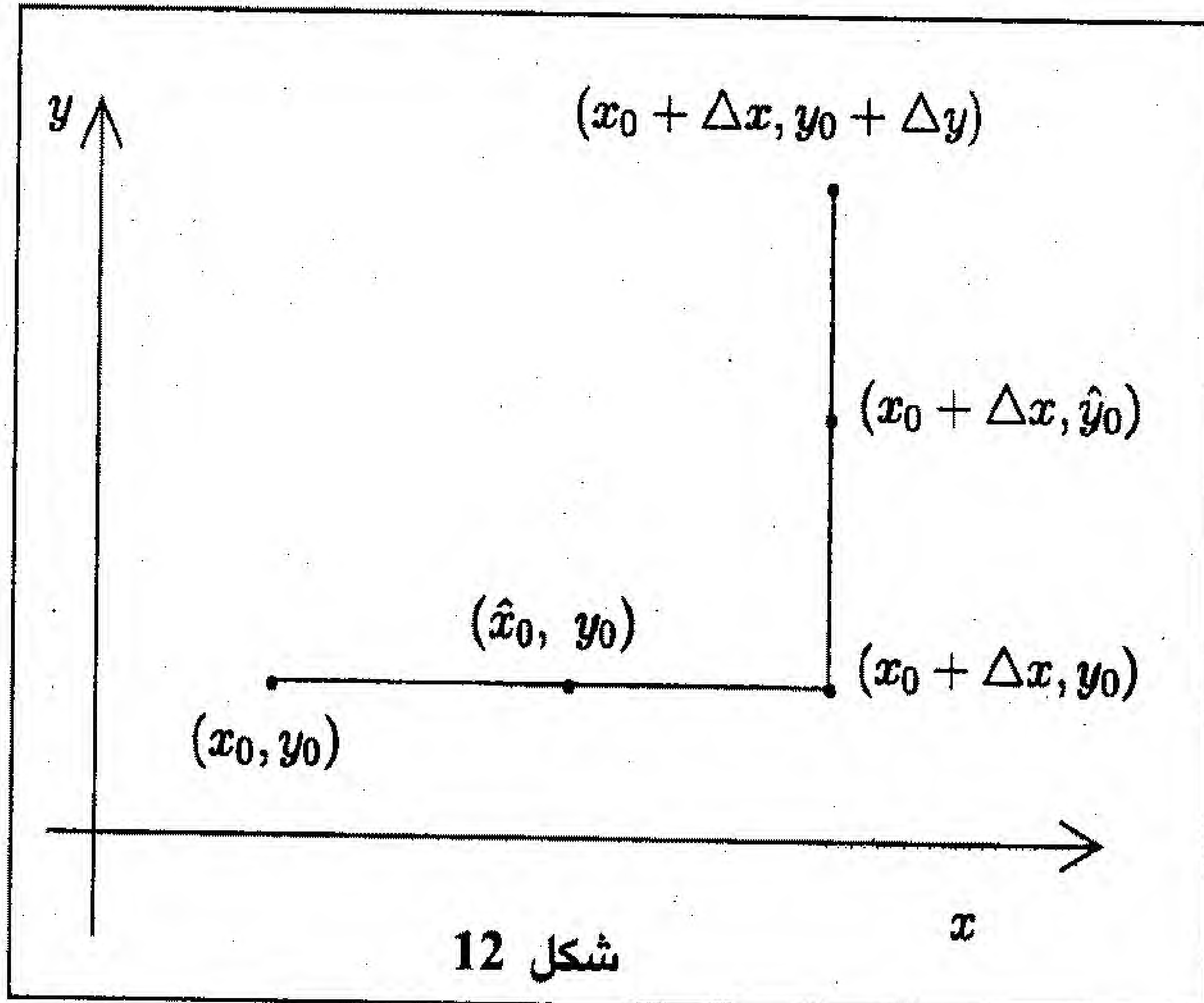
لاحظ أن:

$$f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0) = [f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0 + \triangle x, y_0)]$$
$$+[f(x_0 + \triangle x, y_0) - f(x_0, y_0)]$$

وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة نجد أن:

$$f(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - f(x_0, y_0) = f_y(x_0 + \triangle x, \hat{y}_0)\triangle y + f_x(\hat{x}_0, y_0)\triangle x \qquad (1)$$

حيث أن $\hat{x}_0$ و$\hat{y}_0$ عددان بين $(x_0 + \triangle x, x_0)$ و$(y_0 + \triangle y, y_0)$ على التوالي أنظر الشكل (12).



شكل 12

وإذا عرفنا الدالتين G_1 وG_2 كما يأتي:

$$G_1 = f_x(\hat{x}_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)$$

$$G_2 = f_y(x_0 + \triangle x, \hat{y}_0) - f_y(x_0, y_0)$$

وبالتعويض في (1) نجد أن:

$$\triangle f = f_x(x_0\ y_0)\triangle x + f_y(x_0\ y_0)\triangle y + G_1(\triangle x, \triangle y)\triangle x + G_2(\triangle x, \triangle y)\triangle y$$

ولكن $\hat{x}_0 \to x_0$ عندما $\triangle x \to 0$ و$\hat{y}_0 \to y_0$ عندما $\triangle y \to 0$ وهذا يتضمن $G_1 \to 0, G_2 \to 0$ عندما $(\triangle x, \triangle y) \to (0,0)$.

ويمكن كتابة الفرق $\triangle f$ كما يأتي:

$$\triangle f(x_0, y_0, \triangle x, \triangle y) = df(x_0, y_0, \triangle x, \triangle y) + G_1(\triangle x, \triangle y) + G_2(\triangle x, \triangle y)$$

ويفضل استخدام التفاضل (df) لإيجاد القيم التقريبية على الفرق $\triangle f$ لأن الأخير يصعب إيجاده في كثير من المسائل.

مثال 1

أوجد القيمة التقريبية للمقدار $\left(-(3.95)^2 - (4.1)^2\right)^{\frac{1}{5}}$

الحل

نعتبر الدالة $f(x,y) = \left(-x^2 - y^2\right)^{\frac{1}{5}}$

حيث أن $x = 4$, $\triangle x = -0.05$, $y = 4$, $\triangle y = 0.1$

$$f_x = \frac{1}{5}(-x^2 - y^2)^{-\frac{4}{5}}(-2x)\ ,\ f_y = \frac{1}{5}(-x^2 - y^2)^{-\frac{4}{5}}(-2y)$$

وبذلك

$$df = f_x dx + f_y dy$$

وبالتعويض عن f_x، dx، f_y، dy في المعادلة السابقة نجد أن:

$$=\frac{1}{5}(-32)^{-\frac{4}{5}}(-8)(-0.05)+\frac{1}{5}(-32)^{-\frac{4}{5}}(-8)(0.1)$$

$$=-\frac{1}{200}$$

ولكن $df=f(x+\triangle x,y+\triangle y)-f(x,y)$

أي أن: $f(x+\triangle x,y+\triangle y)=df+f(x,y)$

$$=\frac{-1}{200}-2=-2-\frac{1}{200}=-\frac{401}{200}$$

2

استخدم التفاضل الكلي لإيجاد القيمة التقريبية للمقدار

$$(26.98)^{\frac{1}{3}}\,(36.04)^{\frac{1}{2}}$$

نعتبر الدالة $f(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}$

حيث أن $\triangle y=0.04,\ y=36,\ \triangle x=-0.02,\ x=27$

وبعد إجراء عملية التفاضل نحصل على:

$$df=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\,y^{\frac{1}{2}}\,dx+\frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{3}}\,y^{-\frac{1}{2}}dy$$

وبالتعويض في المعادلة الأخيرة نجد أن:

$$df=\frac{1}{3}(27)^{-\frac{2}{3}}\,(36)^{\frac{1}{2}}(-0.02)+\frac{1}{2}(27)^{\frac{1}{3}}\,(36)^{-\frac{1}{2}}(0.04)$$

$$=\frac{6}{27}(-0.02)+\frac{3}{12}(0.04)$$

$$=-0.0044+0.01$$

$$=0.0056$$

وبما أن:

$$f(x+\triangle x, y+\triangle y) = df + f(x,y)$$
$$= 18 + 0.0056$$
$$= 18.0056$$

ملاحظة

$$dy \approx \triangle y \ , \ dx \approx \triangle x$$

تمارين 4.1

1) بيّن أن القيمة التقريبية للمقدار $\sqrt{(5.98)^2+(8.01)^2}$ هي 9.996 .

2) أوجد القيمة التقريبية لمقدار التغير للدالة

$$f(x,y,z) = x^2z^3 - 3yz^2 + x^{-3} + 2y^{\frac{1}{2}}z$$

إذا تغيرت النقطة (x,y,z) من $(1,4,2)$ إلى $(1.02, 3.97, 1.96)$.

3) استخدم التفاضل لإيجاد القيمة التقريبية لكل من:

أ) $\left[(3.02)^2+(3.98)^2+(6.02)^2+5(1.97)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$

ب) $\left[(3.02)^2+(3.98)^2+(5.97)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$

4) أوجد df و$\triangle f$ لكل من الدوال التالية:

أ) $f(x,y) = e^{xy}sin(x+y)$ حيث $x=\frac{\pi}{4}, y=0, \triangle x = -\frac{\pi}{2}$ و$\triangle y = 4\pi$

ب) $f(x,y) = sin\ xy + cos(x+y)$ حيث $x=\frac{\pi}{6}, y=0, \triangle x = 2\pi, \triangle y = 3\pi$

5.1 التفاضل الكلي للدوال في n من المتغيرات ومحدد جاكوبي

الدالة في n من المتغيرات تكتب على الصورة التالية:

$$y = f(x_1..., x_n)$$

ويعرف التفاضل الكلي كما يأتي:

$$dy = f_{x_1}dx_1 + ... + f_{x_n}dx_n$$

ويعرف الفرق $\triangle y$ كما يأتي:

$$\triangle y = f(x_1 + \triangle x_1, ..., x_n + \triangle x_n) - f(x_1, ..., x_n)$$

$$= f_{x_1}dx_1 + ... + f_{x_n}dx_n + G_1dx_1 + ... + G_ndx_n$$

حيث إن $G_1 \to 0,\ G_2 \to 0,\ ...,\ G_n \to 0$

عندما $\triangle x_1 \to 0,\ \triangle x_2 \to 0,\ ... \triangle x_n \to 0$

وإذا اعتبرنا منظومة من الدوال على الصورة التالية:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, ..., x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, ..., x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

وإذا كانت مشتقات الدوال السابقة متصلة في نطاقها، فإن

$$\begin{aligned} dy_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}dx_n \\ &\vdots \\ dy_m &= \frac{\partial f_m}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}dx_n \end{aligned} \tag{2}$$

المعادلات السابقة يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ . \\ . \\ . \\ dy_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & . \; . \; . \; . & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & . \; . \; . \; . & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ . \\ . \\ . \\ dx_n \end{bmatrix} \qquad (3)$$

وتسمى المصفوفة:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & . \; . \; . \; . & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & . \; . \; . \; . & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

مصفوفة جاكوبي.

وإذا كانت $m = n$ في نظام المعادلات السابق فإنه يمكن تعريف محدد جاكوبي كما يأتي:

$$J = det\left(\frac{\partial f_i}{\partial f_j}\right)$$

وكذلك يرمز لمحدد جاكوبي كما يأتي:

$$J = \frac{\partial(y_1, ..., y_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)} = \frac{\partial(f_1, ..., f_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)}$$

مثال 1 ·

إذا كان

$$z = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi\sin\theta, x = \rho\sin\theta\cos\theta$$

حيث أن $0 \le \theta < 2\pi$, $0 \le \phi \le \pi$ و$\rho \ge 0$

فأوجد محدد جاكوبي.

الحل

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \end{vmatrix}$$

وبفك المحدد السابق نجد أن:

$$J = \rho^2 \sin\phi$$

ملاحظة

المعادلات السابقة تمثل العلاقة بين الإحداثيات المستطيلة (x, y, z) والإحداثيات الكروية.

مثال 2

أوجد الدالة الخطية $(\vec{d}_y = \vec{f}_x\,\vec{d}_x)$ التي تستخدم لإيجاد القيمة التقريبية للدالة $\vec{y} = \vec{f}\,(\vec{x})$ عند النقطة $(1,1)$ وأوجد القيمة التقريبية للدالة عند $(1.02,\ 1.03)$.

حيث أن $y_1 = x_1^2 + x_2^2$ ، $y_2 = x_1 x_2$

الحــل

$$\vec{d}_y = \vec{f}_x \ \vec{d}_x$$

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ \\ dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ \\ dx_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.03 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

والقيمة التقريبية للدالة $\vec{f}\ (1.02, 1.03)$ هي

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.05 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1 \\ 1.05 \end{bmatrix}$$

مثــال 3

أوجد مصفوفة جاكوبي لنظام المعادلات التالية عند النقطة $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ثم أوجد القيمة التقريبية لـ (u, v, w) عند النقطة $(0.1, 1.6)$.

حيث أن $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$ و $w = 2e^x$

الحــل

مصفوفة جاكوبي :

$$\begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ \\ e^x \sin y & e^x \cos y \\ \\ 2e^x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \\ 1 & 0 \\ \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ويمكن حساب مقدار التغير كما يأتي:

$$\begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.03 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

والقيمة التقريبية عند النقطة $(0.1, 1.6)$ تكون

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.03 \\ 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.03 \\ 1.1 \\ 2.2 \end{bmatrix}$$

تمارين 5.1

أوجد محدد جاكوبي الموضح في كل حالة:

1) $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ حيث أن $u = x^3 - 3xy^2$ و $v = 3x^2y - y^3$

2) $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$ حيث أن $u = xe^y \cos z, v = xe^y \sin z$ و $w = xe^y$.

3) $\dfrac{\partial(f,g,h)}{\partial x,y,z)}$ حيث أن

$$f(x,y,z,t) = x^2 + 2y + z^2 - t^2$$

$$g(x,y,z,t) = xyz + t^2$$

$$h(x,y,z,t) = z^2 - t^2$$

6.1 مشتقات وتفاضل دالة الدالة

نفرض أن الدوال التالية معرفة في نطاق مناسب ومشتقاتها الجزئية متصلة.

نظرية 4

أ) إذا كانت $z = f(x, y)$ حيث أن $y = h(t),\ x = g(t)$ فإن

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

ب)
إذا كانت $z = f(x, y)$ حيث أن $y = h(u, v),\ x = g(u, v)$ فإن

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

ويمكن تعميم أ، ب إلى n من الدوال وتعرف النظرية السابقة بقاعدة السلسلة.

البرهان

أ) تعرف الفروق $\triangle x$ و $\triangle y$ و $\triangle z$ كما يأتي

$$\triangle y = h(t + \triangle t) - h(t),\ \triangle x = g(t + \triangle t) - g(t)$$

$$\triangle z = f(x + \triangle x, y + \triangle y) - f(x, y)$$

و
$$\triangle z = \frac{\partial z}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial z}{\partial y}\triangle y + G_1\triangle x + G_2\triangle y$$

وبالقسمة على $\triangle t$:

$$\frac{\triangle z}{\triangle t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\triangle x}{\triangle t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\triangle y}{\triangle t} + G_1\frac{\triangle x}{\triangle t} + G_2\frac{\triangle y}{\triangle t}$$

وعندما $\triangle t \to 0$، فإن $\frac{\triangle x}{\triangle t} \to \frac{dx}{dt}$ و $\frac{\triangle y}{\triangle t} \to \frac{dy}{dt}$ و G_1 وG_2 يؤولان إلى الصفر أيضاً. أي أن:

$$\lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle z}{\triangle t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} + 0. \frac{\triangle x}{\triangle t} + 0. \frac{\triangle y}{\triangle t}$$

وبذلك

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

لاحظ أن التفاضل dz يكتب كما يلي:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

ب) وكما في الجزء الأول الفرق $\triangle z$ يكتب كما يأتي:

$$\triangle z = \frac{\partial z}{\partial x} \triangle x + \frac{\partial z}{\partial y} \triangle y + G_1 \triangle x + G_2 \triangle y$$

وبالقسمة على $\triangle u$ نجد أن:

$$\frac{\triangle z}{\triangle u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\triangle x}{\triangle u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\triangle y}{\triangle u} + G_1 \frac{\triangle x}{\triangle u} + G_2 \frac{\triangle y}{\triangle u}$$

وبأخذ نهاية الطرفين عندما $\triangle u \to 0$ نجد أن:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

ويبرهن على الجزء الآخر من ب بالطريقة نفسها.

ملاحظة: يمكن كتابة (ب) كما يأتي:

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u$$

$$z_v = z_x x_v + z_y y_v$$

مثـــال 1

إذا كان $y = u^v$ حيث أن u وv دالتان في x فأوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحــل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx}$$

$$= v\ u^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v\ ln\ u\frac{dv}{dx}$$

مثـــال 2

إذا كان $y = log_u\ v$ حيث أن u و v دالتان في x فأوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحــل

باستخدام العلاقة بين اللوغاريتمات الطبيعية واللوغاريتمات لأي أساس نجد أن:

$$y = log_u\ v = \frac{ln\ v}{ln\ u}\ ;\ u > 0, v > 0$$

ويمكن إيجاد المشتقات الجزئية كما يلي:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = (ln\ v)\frac{d}{du}\ (ln\ u)^{-1}$$

$$= -(ln\ u)^{-2}\left(\frac{1}{u}\right)ln\ v$$

$$= -\frac{1}{u}\ (ln\ u)^{-2} ln\ v$$

كذلك

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{v}\ \left(\frac{1}{ln\ u}\right) = \frac{1}{v\ ln\ u}$$

وهكذا

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-ln\ v}{u(ln\ u)^2}\ \frac{du}{dx}+\frac{1}{v\ ln\ u}\ \frac{dv}{dx}$$

مثـــال 3

إذا كانت $u=f(x,y)$ حيث أن $y=r\ sin\theta,\ x=r\ cos\theta$ فبين أن:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

الحـــل

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$=cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}$$

وهذا يتضمن

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2=cos^2\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+sin^2\theta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2sin\theta\ cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (1)$$

وبطريقة مماثلة

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}=\frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$=-r\ sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r\ cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}$$

وهذا يتضمن

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=r^2sin^2\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+r^2cos^2\theta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2r^2sin\theta\ cos\theta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (2)$$

من (1) و(2) نجد أن:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

مثـــال 4

إذا كانت $W=F(x,y,z,t)$ حيث $x=f(t)$, $y=g(t)$ و $z=h(t)$ فأوجد $\frac{dw}{dt}$

الحـــل

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial w}{\partial t}$$

مثـــال 5

أوجد $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ و $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ حيث أن $z=\frac{xy}{x^2+y^2}$ و $x=r\ cos\theta$ و $y=r\ sin\theta$ عند النقطة $\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$.

الحـــل

بالتعويض في الدالة $z=\frac{xy}{x^2+y^2}$ عن x و y نجد أن:

$$z=\frac{r^2 sin\theta\ cos\theta}{r^2}=sin\theta\ cos\theta$$
$$=\frac{1}{2}\ sin\ 2\theta$$

وبذلك $\frac{\partial z}{\partial \theta}=cos\ 2\theta$ وعند النقطة $\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$ نجد أن:

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

و $\frac{\partial z}{\partial r}=0$ ويمكن استخدام قاعدة السلسلة.

تمارين 6.1

أوجد $\frac{dw}{dt}$ في التمارين التالية:

1) $w = ln(x^2 + y^2 + z^2)$ حيث أن $x = sint$, $y = cost$ و $z = e^{-t^2}$

2) $w = sin\ xy^2z^3$ حيث أن $x = 3t$, $y = t^{\frac{1}{2}}$ و $z = t^{\frac{1}{3}}$

3) $z = arctan(y^2 - x^2)$ حيث أن $x = sint$ و $y = cost$

أوجد $\frac{\partial w}{\partial u}$ و $\frac{\partial w}{\partial v}$ في التمارين التالية:

4) $w = y\ sec\ x\ z$ حيث أن $x = \frac{v}{u}$ و $y = u - v$ و $z = \frac{v}{u}$

5) $w = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$ حيث أن $x = \frac{ln\ u}{v}$, $y = ln\ u$ و $z = \frac{ln\ u}{vu}$

6) $w = \frac{x + y}{z + x}$ حيث $x = u - v$، $y = v - u$ و $z = v$

7) إذا كانت $w = f(x, y)$ حيث أن $x = e^r\ cos$ و $y = e^r\ sin\ t$ فبين أن:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^{-2r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)$$

8) إذا كانت $w = f(x - y,\ y - z,\ z - x)$ فبين أن:

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

7.1 المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية أو أكثر لدالة الدالة

قاعدة السلسلة الجزء الأول تكتب كما يأتي:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (1)$$

راجع البند السابق.

وبتطبيق تفاضل حاصل ضرب دالتين نجد أن:

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \qquad (2)$$

وبتطبيق القاعدة (1) نستطيع إيجاد $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ و $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

أي أن:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{dy}{dt} \qquad (3)$$

وبالطريقة نفسها

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{dy}{dt} \qquad (4)$$

من (3) و(4) وبالتعويض في (2) نحصل على قاعدة السلسلة التالية:

$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}$$

ولإيجاد المشتقات الجزئية الثانية للجزء الثاني من قاعدة السلسلة نتبع الخطوات نفسها. فإذا كان $z=f(x,y)$, $x=g(u,v)$ و $y=h(u,v)$

فإن

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial v} \qquad (1)$$

ويمكن إيجاد المشتقة الجزئية الثانية كما يأتي:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{\partial}{\partial u}\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial}{\partial u}\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{\partial y}{\partial u}\ \frac{\partial}{\partial u}\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \qquad (2)$$

ويمكن إيجاد $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ و $\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ بتطبيق (1) مرة أخرى

$$\frac{\partial}{\partial u}\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial u}\ \frac{\partial}{\partial y}\right)\ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial y}{\partial u}\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} \qquad (3)$$

وبطريقة مشابهة تماماً

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial u}\ \frac{\partial}{\partial y}\right)\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial y}{\partial u}\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \qquad (4)$$

باستخدام (3) و(4) وبالتعويض في (2) نحصل على الصورة التالية:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{\partial z}{\partial x}\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\ \frac{\partial x}{\partial u}\ \frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial y}\ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$$

ويمكن إيجاد $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ والمشتقات الجزئية الأخرى من رتب عليا بطريقة مشابهة تماماً.

الصور السابقة مهمة ويمكن التعويض فيها مباشرة لإيجاد المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية، إلا أن استخدام قاعدة السلسلة من الرتبة الأولى يعتبر هو الأساس حيث يمكن استخدام القاعدة عدة مرات كما يتضح من الأمثلة التالية:

مثـــال 1

إذا كانت $w = f(x,y)$ حيث أن $x = r\ cos\theta$ و $y = r\ sin\theta$ فأوجد $\nabla^2 w$ بدلالة r و θ

الحــل

لاحظ أن $\nabla^2 w = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

ويمكن كتابة الجزء الثاني من قاعدة السلسلة كما يأتي:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

وبالتعويض عن المشتقات الجزئية لـ x وy نجد أن:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = cos\theta\frac{\partial w}{\partial x} + sin\theta\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = -r\ sin\theta\frac{\partial w}{\partial x} + r\ cos\theta\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (2)$$

وبضرب المعادلة الأولى في $r\ sin\ \theta$ والمعادلة الثانية في $cos\ \theta$ وبالجمع نحصل على المعادلة التالية:

$$r\ sin\theta\frac{\partial w}{\partial r} + cos\theta\frac{\partial w}{\partial \theta} = r\ \frac{\partial w}{\partial y} \qquad (3)$$

وبضرب المعادلة الأولى في $r\ cos\theta$ والمعادلة الثانية في $-sin\theta$ وبالجمع نجد أن:

$$r\ cos\theta\frac{\partial w}{\partial r} - sin\theta\frac{\partial w}{\partial \theta} = r\frac{\partial w}{\partial x} \qquad (4)$$

ويمكن إيجاد المشتقة الجزئية الثانية $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ كما يأتي:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$=\left(cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(cos\theta\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{1}{r}sin\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)$$

$$=cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(cos\theta\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{1}{r}sin\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{r}sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(cos\theta\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{1}{r}sin\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)$$

وبتطبيق المؤثرين $\frac{\partial}{\partial r}$ و $\frac{\partial}{\partial\theta}$ على الدوال الموجودة داخل القوس التالي لكل منها نجد أن:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=cos\theta\left(cos\theta\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}sin\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}-\frac{1}{r}sin\theta\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}\right)$$

$$-\frac{1}{r}sin\theta\left(-sin\theta\frac{\partial w}{\partial r}+cos\theta\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial r}-\frac{1}{r}cos\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}-\frac{1}{r}sin\theta\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)$$

وبتجميع الحدود المتشابهة نحصل على الصورة التالية:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=cos^2\theta\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{2}{r^2}sin\theta\ cos\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}-\frac{2}{r}sin\theta\ cos\theta\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial r}$$

$$+\frac{1}{r^2}sin^2\theta\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}sin^2\theta\frac{\partial w}{\partial r}\qquad(5)$$

وبالطريقة نفسها نجد أن:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=sin^2\theta\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{2}{r^2}sin\theta\ cos\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{2}{r}sin\theta\ cos\theta\frac{\partial^2 w}{\partial\theta\partial r}$$

$$+\frac{1}{r}cos^2\theta\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}cos^2\theta\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\qquad(6)$$

وبجمع المعادلتين (5) و(6) نجد أن:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}$$

ملاحظة

يمكن الحصول على النتيجة نفسها إذا استخدمنا الصور التي حصلنا عليها في بداية هذا البند للمشتقتين $\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$ و $\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$ ونترك ذلك كتمرين للقارئ.

مثال 2

أوجد $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ حيث أن $w=tan^{-1}\frac{y}{x}$

الحل

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

وبتفاضل الدالة $\frac{\partial w}{\partial x}$ مرة أخرى بالنسبة للمتغير x :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{y(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

وبتفاضل الدالة الأصلية بالنسبة للمتغير ¤y¤

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

وبتفاضل الدالة $\frac{\partial w}{\partial y}$ بالنسبة للمتغير y

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{-x(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

مثـــال 3

أوجد $\nabla^4 w$ حيث أن w دال في المتغيرين x و y.

الحـــل

المؤثر التفاضلي ∇w يكتب كما يأتي

$$\nabla w = \frac{\partial w}{\partial x} i + \frac{\partial w}{\partial y} j$$

وبذلك

$$\nabla^2 w = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j\right) \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} i + \frac{\partial w}{\partial y} j\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

ويمكن كتابة المؤثر التفاضلي ∇^2 (مؤثر لابلاس) كما يأتي:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

وهكذا

$$\nabla^4 w = \nabla^2 . \nabla^2 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$= \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

$$= \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$$

تمارين 7.1

1) إذا كانت $w = tan^{-1}\left(ln\ \frac{x}{y}\right)$ فأوجد $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

2) إذا كانت $w = e^{x^2-y^2}$ فأوجد $\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$ و $\frac{\partial^3 y}{\partial x \partial y^2}$.

3) بيّن أي الدوال التالية توافقية (Harmonic) أو توافقية ثنائية (Biharmonic) أو غير ذلك.

$$e^{e^{-x^2}},\ xe^x\ cos\ y,\ e^y\ sin\ x,\ e^x\ cos\ y$$

ملاحظة

الدالة تكون توافقية إذا كان $\nabla^2 w = 0$ وتوافقية ثنائية إذا كان $\nabla^4 w = 0$.

4) إذا كانت $w = f(x, y, z)$ حيث أن:

$$z = \rho cos\phi,\ y = \rho sin\phi\ sin\theta,\ x = \rho sin\phi\ cos\theta.$$

$$\rho \geq 0,\ 0 \leq \phi \leq \pi,\ 0 \leq \theta < 2\pi$$

فبيّن أن

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\rho^2 sin^2\phi}\ \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$

$$+ \frac{2}{\rho}\ \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{cot\phi}{\rho^2}\ \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

5) إذا كانت $w = f(x, y, z)$ حيث أن $x = r\ cos\theta$ و $y = r\ sin\theta$ و $z = z$ فبين أن:

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

8 . 1 قاعدة السلسلة بصورة عامة

من الممكن التعامل مع فئتين من نظم المعادلات التي تمثل دوالاً

$$
\begin{aligned}
y_1 &= f_1(u_1,\ ...,\ u_p),\\
&.\\
&.\\
&.\\
y_n &= f_n(u_1,\ ...,\ u_p).
\end{aligned} \tag{1}
$$

حيث أن:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= g_1(x_1,\ ...,\ x_n),\\
&.\\
&.\\
&.\\
y_p &= g_p(x_1,\ ...,\ x_n).
\end{aligned} \tag{2}
$$

وبالتعويض عن $u_1, ..., u_p$ في (1) نحصل على دوال الدوال التالية

$$
\begin{aligned}
&y_1 = f_1\big(g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_p(x_1, ..., x_n)\big) = F_1(x_1, ..., x_n)\\
&.\\
&.\\
&.\\
&y_m = f_m\big(g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_p(x_1, ..., x_n)\big) = F_m(x_1, ..., x_n)
\end{aligned} \tag{3}
$$

ويمكن الحصول على المشتقات الجزئية لدوال الدوال (3):

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \frac{\partial y_i}{\partial u_1}\,\frac{\partial u_1}{\partial x_j} + ... + \frac{\partial y_i}{\partial u_p}\,\frac{\partial u_p}{\partial x_j} \quad (i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n) \tag{4}$$

المعادلة (4) يمكن التعبير عنها بلغة المصفوفات حيث أن:

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

و

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial u_p} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial y_m}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial u_p} \end{bmatrix}$$

و

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \frac{\partial u_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial u_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

وبذلك يمكن كتابة المعادلة (4) بالصورة التالية:

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial u_i}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

المعادلة الأخيرة تسمى قاعدة السلسلة في صورتها العامة.

مثــال 1

إذا كان

$$y_1 = u_1u_2 - u_1u_3 \quad ، \quad u_1 = x_1 \; cos \; x_2 + (x_1 - x_2)^2$$

حيث أن:

$$y_2 = u_1u_3 + u_2^2 \quad ، \quad u_2 = x_1 \; sin \; x_2 + x_1x_2$$

$$u_3 = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$$

فأوجد $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$

الحــل

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j}\right) = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} u_2 - u_3 & u_1 & -u_1 \\ u_3 & 2u_2 & u_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (cos \; x_2 + 2(x_1 - x_2) & -(x_1 \; sin \; x_2 + 2(x_1 - x_2)) \\ (sin \; x_2 + x_2) & (x_1 \; cos \; x_2 + x_1) \\ (2x_1 - x_2) & (-x_1 + 2x_2) \end{bmatrix}$$

ومن المفضل ترك النتيجة على هذه الصورة وللحصول على القيمة العددية نعوض عن القيم المعطاة ونترك ضرب المصفوفتين في الخطوة الأخيرة.

$x_2 = 0, \; x_1 = 1$ فإن $u_3 = u_1 = 2$ و $u_2 = 0$

وبذلك

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & 8\\ 7 & -4\end{bmatrix}$$

وهذا يعني

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=7,\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2}=8,\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1}=7, \text{ و } \frac{\partial y_2}{\partial x_2}=-4$$

مثال 2

أوجد $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ كحاصل ضرب مصفوفتين وأوجد المصفوفة الناتجة عن القيم المعطاة للمتغيرات x_1, x_2، . . .

حيث أن:

$y_1 = u_1^2 + u_2^2 - 3u_1 + u_3$ و $u_1 = x_1 x_2 x_3^2$

$y_2 = u_1^2 - u_2^2 + 2u_1 - 3u)3$ و $u_2 = x_1 x_2^2 x_3$

$u_3 = x_1^2 x_2 x_3$.

الحـل

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)=\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}2u_1-3 & 2u_2 & 1\\ 2u_1+2 & -2u_2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2x_3^2 & x_1x_3^2 & 2x_1x_2x_3\\ x_2x_3 & 2x_1x_2x_3 & x_1x_2^2\\ 2x_1x_2x_3 & x_1^2x_3 & x_1^2x_2\end{bmatrix}$$

وإذا كان $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ فإن $u_1 = u_2 - u_3$

وبذلك

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -4 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

التفاضل وقاعدة السلسلة

إذا قمنا بإجراء عملية التفاضل في المعادلتين (1) و(2) نحصل على المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} dy_1 &= \frac{\partial y_1}{\partial u_1} du_1 + \dots + \frac{\partial y_1}{\partial u_p}\, du_p, \\ &\;\;\vdots \\ dy_m &= \frac{\partial y_m}{\partial u_1} du_1 + \dots + \frac{\partial y_m}{\partial u_p}\, du_p \end{aligned} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} du_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial u_1}{\partial x_n}\, dx_n, \\ &\;\;\vdots \\ du_p &= \frac{\partial u_p}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial u_p}{\partial x_n}\, dx_n \end{aligned} \qquad (4)$$

ويمكن كتابة المعادلات السابقة على الصورة التالية:

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dy_m \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j}\right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) \begin{bmatrix} dx_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ dx_n \end{bmatrix}$$

والمعادلة الأخيرة تسمى قاعدة السلسلة العامة في الصورة التفاضلية.

ملاحظة

المصفوفات والمحددات في هذا البند تسمى مصفوفات ومحددات جاكوبي.

مثال 3

أوجد $\frac{\partial(z,w)}{\partial(x,y)}$ حيث أن $w = u^3 + v^3 - 2u^2,\ z = u^3 + 3u^2v - v^3 + u^2 - v^2$ حيث أن $v = x\ sin\ xy + x^2 - y^2,\ u = x\ cos\ xy$ عندما $x = 1$ و $y = 0$.

الحل

$$\frac{\partial(z,w)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(z,w)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

$$= \begin{pmatrix} 3u^2 + 6uv + 2u & 3u^2 - 3v^2 - 2v \\ 3u^2 - 4u & 3v^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} cos\ xy - xy\ sin\ x & -x^2 sin\ xy \\ sin\ xy + xy\ cos\ xy + 2x & x^3 cos\ xy - 2y \end{pmatrix}$$

وعندما $x = 1$ و $y = 0$ فإن $u = 1$ و $v = 1$

وبالتعويض في المحددين السابقين نجد أن:

$$\frac{\partial(z,w)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 11 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (33 - 2)(1) = 31$$

تمارين 8.1

1) أوجد مصفوفة جاكوبي $\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ كحاصل ضرب مصفوفتين وأوجد المصفوفة عند القيم المعطاة للمتغيرات $x_1, x_2, ...$ حيث أن:

أ) $y_1 = u_1u_2 - 3u_1,\ y_2 = u_2^2 + 2u_1u_2^2 + 2u_1^3 - u_2$ و

$u_1 = x_1\ cos3x_2,\ u_2 = x_1\ tanx_2$ عند $x_1 = x_2 = 0$

ب) $y_1 = u_1^2 + u_2^2 - 3u_1 + u_3^2,\ y_2 = u_1^2 - 3u_2^2 + u_1 - u_3$ حيث أن

$u_1 = x_1^2x_2x_3$، $u_2 = x_1x_2^2x_3$، $u_3 = x_1x_2x_3^2$ عندما $x_1 = x_2 = x_3 = 1$

ج) $y_1 = u_1e^{u_2}$، $y_2 = u_1e^{-u_2}$، $y_3 = u^2$ حيث أن

$u_1 = x_1^2 - x_2,\ u_2 = 2x_1^2 + x_2$ عندما $x_1 = 1$ ، $x_2 = -1$

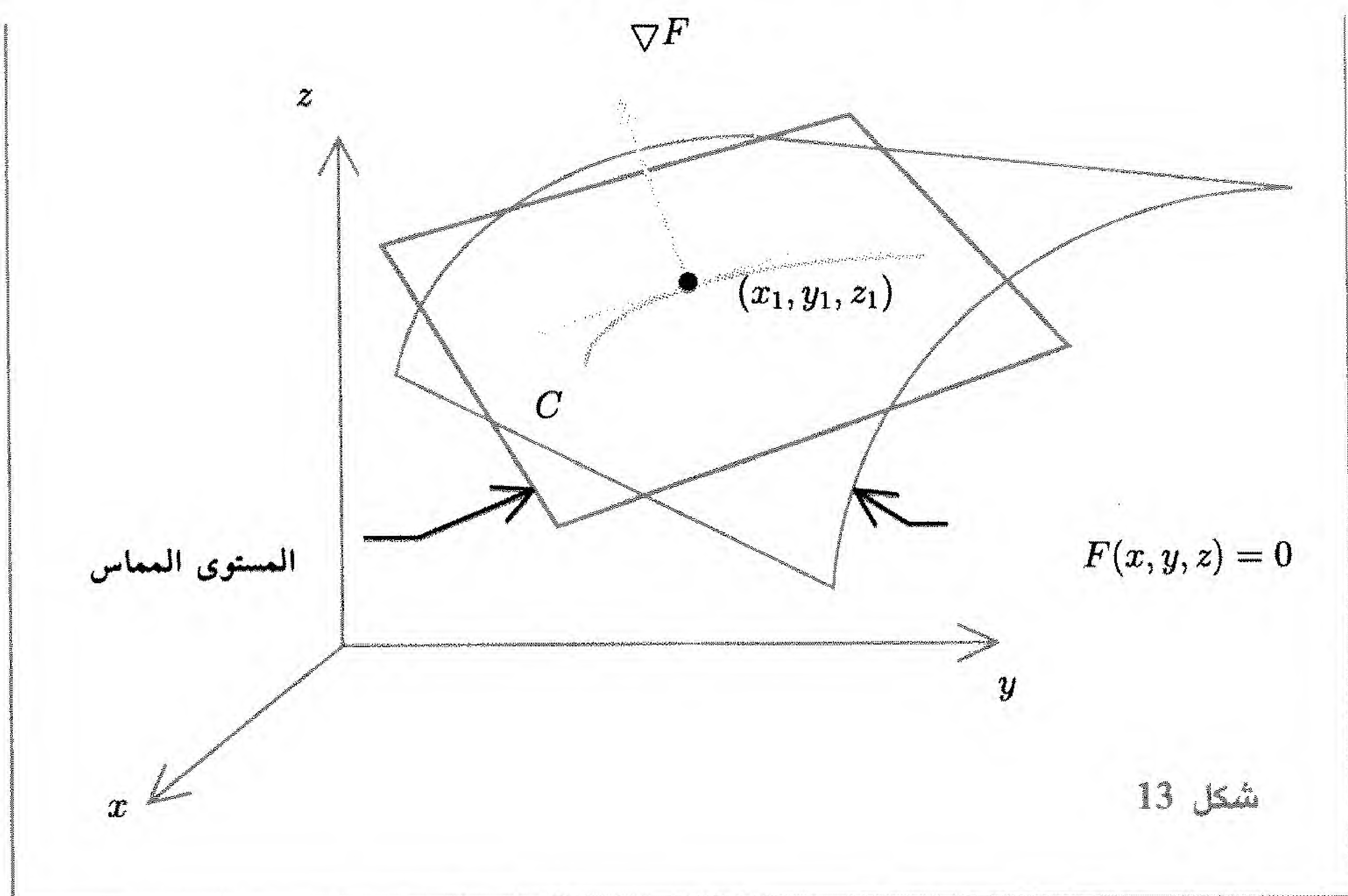
2) أوجد $\frac{\partial(z,w)}{\partial(s,t)}$ إذا كان $x = (z^2 + w)^{\frac{1}{2}},\ y = w(z^2 + w^2)$.

$z = (s + t + 1)^{-2},\ w = (s - t + 1)^{-1}$ عندما $x = 1$ و $y = 0$.

9 . 1 المستوى المماس (Tangent plane)

الدالة في متغير واحد تمثل منحنى في المستوى. والمشتقة عند نقطة على المنحنى تمثل ميل المماس للمنحني عند هذه النقطة. الدالة في متغيرين $z = f(x, y)$ تمثل سطحاً ذا ثلاثة أبعاد في الفضاء.

أي أن المعادلة $F(x, y, z) = 0$ تمثل سطحاً في الفضاء.



شكل 13

نفرض أن النقطة (x_1, y_1, z_1) تقع على السطح ونفرض أن $y = g(t),\ x = f(t)$ و$z = h(t)$ تمثل المعادلات البارامترية للمنحنى الذي يقع على السطح ويمر بالنقطة (x_1, y_1, z_1) عندما $t = t_1$. أنظر الشكل (13) واضح أن:

$$F\big[(ft),\ g(t), h(t)\big] = 0 \tag{1}$$

وبعد إجراء عملية التفاضل:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0 \tag{2}$$

حيث يتم إيجاد قيم المشتقات الجزئية $\frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial x}$ عند (x_1, y_1, z_1) أي $t = t_1$ وبذلك

$$dz = h'(t)dt,\ dy = g'(t)dt,\ dx = f'(t)dt$$

وعندما $dt = t - t_1$ فإن $dx = x - x_1$, $dy = y - y_1$ و $dz = z - z_1$

المعادلة (2) يمكن أن تكتب على الصورة التالية:

$$(x - x_1)F_x + (y - y_1)F_y + (z - z_1)F_z = 0 \qquad (3)$$

حيث يتم إيجاد قيم المشتقات الجزئية عند النقطة (x_1, y_1, z_1). المعادلة الأخيرة تمثل معادلة مستوى يحتوي على المماس للمنحنى المحدد والمعادلة الأخيرة لا تعتمد على منحنى معين. كل المماسات للمنحنيات في السطح خلال النقطة (x_1, y_1, z_1) تقع في مستوى واحد وهو الذي تمثله المعادلة (3)، أي المستوى المماس للسطح عند النقطة (x_1, y_1, z_1).

ملاحظة

إذا كانت $F_x = F_y = F_z = 0$ فإن المعادلة (3) لا تحدد مستوى.

المعادلة (3) يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$\nabla F.dr = 0 \qquad (4)$$

حيث أن متجه الموضع: $\vec{r} = xi + yj + zk$ و ∇F يسمى تدرج الدالة F:

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}i + \frac{\partial F}{\partial y}j + \frac{\partial F}{\partial z}k$$

أي أن العمودي على السطح هو التدرج عند النقطة المعينة (x_1, y_1, z_1).

مثال 1

أوجد معادلة المستوى المماس لرسم المعادلة $z = f(x,y)$ عند النقطة (x_0, y_0, z_0).

الحل

نفرض أن $F(x,y,z) = z - f(x,y)$

لاحظ أن معادلة المستوى المماس

$$(x - x_0)F_x + (y - y_0)F_y + (z - z_0)F_z = 0 \qquad (1)$$

حيث أن $F_y = -f_y,\ F_x = -f_x$ و $F_z = 1$

وبالتعويض في المعادلة (1) نجد أن:

$$(x - x_0)f_x + (y - y_0)f_y = z - z_0$$

مثال 2

أوجد معادلة المستوى المماس للسطح

$$4x^2 + 9y^2 + z^2 - 49 = 0$$

عند النقطة $(1, -2, 3)$.

الحل

نفرض أن $F(x,y,z) = 4x^2 + 9y^2 + z^2 - 49 = 0$

وهذا يتضمن $F_x = 8x = 8$

$$F_y = 18y = -36$$

و $F_z = 2z = 6$

وبالتعويض في معادلة المستوى المماس نحصل على المعادلة التالية:

$$(x-1)8 - 36(y+2) + 6(z-3) = 0$$

ويمكن أن تختصر المعادلة السابقة إلى الصورة التالية:

$$4x - 18y + 3z - 49 = 0$$

مثـــال 3

أوجد معادلة المستوى المماس والمستقيم المتعامد لرسم المعادلة $z = 2e^{-x} cos\ y$ عند النقطة $\left(0, \frac{\pi}{3}, 1\right)$.

الحــل

نفرض أن $F(x,y,z) = z - 2e^{-x} cos\ y = 0$

وبأخذ المشتقات الجزئية:

$$F_z = 1 \text{ ، } F_y = 2e^{-x} sin\ y,\ F_x = 2e^{-x} cos\ y$$

عند النقطة $\left(0, \frac{\pi}{3}, 1\right)$ فإن:

$$F_z = 1,\ F_y = \sqrt{3},\ F_x = 1$$

وبالتعويض في معادلة المستوى المماس في المثال (1) نحصل على الصورة التالية:

$$z - 1 = x + \sqrt{3}\left(y - \frac{\pi}{3}\right)$$

العمودي على السطح أو التدرج:

$$\nabla F|_{\left(0,\frac{\pi}{3},1\right)} = i + \sqrt{3}\ j + k$$

والمعادلات البارامترية:

$$z = 1 - t,\ y = \frac{\pi}{3} + \sqrt{3}t,\ x = t$$

إذن الصورة المتماثلة لمعادلة العمودي:

$$x = \frac{y - \frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}} = z - 1$$

تعريف 8

معادلة المستقيم المتعامد (Normal line) تكتب على الصورة التالية:

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

ففي المثال السابق يمكن الحصول على معادلة العمودي على السطح باستخدام التعريف (8):

$$\frac{x}{-1} = \frac{y - \frac{\pi}{3}}{-\sqrt{3}} - \frac{z - 1}{-1}$$

وهي النتيجة نفسها.

مثال 4

بيّن أن كل مستقيم متعامد على الكرة:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

يمر دائماً بمركزها.

الحل

بما أن مركز الكرة يمر بالنقطة $(0, 0, 0)$ يجب أن نبين أن مركز الكرة يحقق

معادلات المستقيم المتعامد.

وباستخدام التفاضل الضمني الجزئي:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{z}{x}\ ,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

المستقيم المتعامد على الكرة عند (x_0, y_0, z_0):

$$\frac{x - x_0}{-\dfrac{x_0}{z_0}} = \frac{y - y_0}{-\dfrac{y_0}{z_0}} = \frac{z - z_0}{-1}$$

لاحظ أن $x = y = z = 0$ تحقق المعادلة السابقة.

تمارين 9.1

أوجد في كل حالة معادلة المستوى المماس ومعادلات المستقيم المتعامد لكل سطح عند النقطة المعطاة.

1) $z = e^x sin\ y$ عند النقطة $\left(1, \frac{\pi}{2}, e\right)$.

2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 6$ عند النقطة $(4, 1, 9)$.

3) $z = e^{2x} cos 3y$ عند النقطة $\left(1, \frac{\pi}{3}, e^2\right)$.

4) $z = ln\ (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ عند النقطة $(3, 4, ln5)$.

5) $xyz - 4xz^3 + y^3 = 10$ عند النقطة $(-1, 2, 1)$.

6) بيّن أن معادلة المستوى المماس عند النقطة (x_1, y_1, z_1) للسطح $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1$ تكتب على الصورة التالية:

$$\frac{xx_1}{A^2} + \frac{yy_2}{B^2} + \frac{zz_1}{C^2} = 1$$

7) بيّن أن كل مستوى مماس للسطح (المخروط):

$x^2 + y^2 + z^2$ يمرّ بنقطة الأصل.

8) بيّن أن معادلة المستوى المماس للسطح عند (z_0, y_0, z_0) :

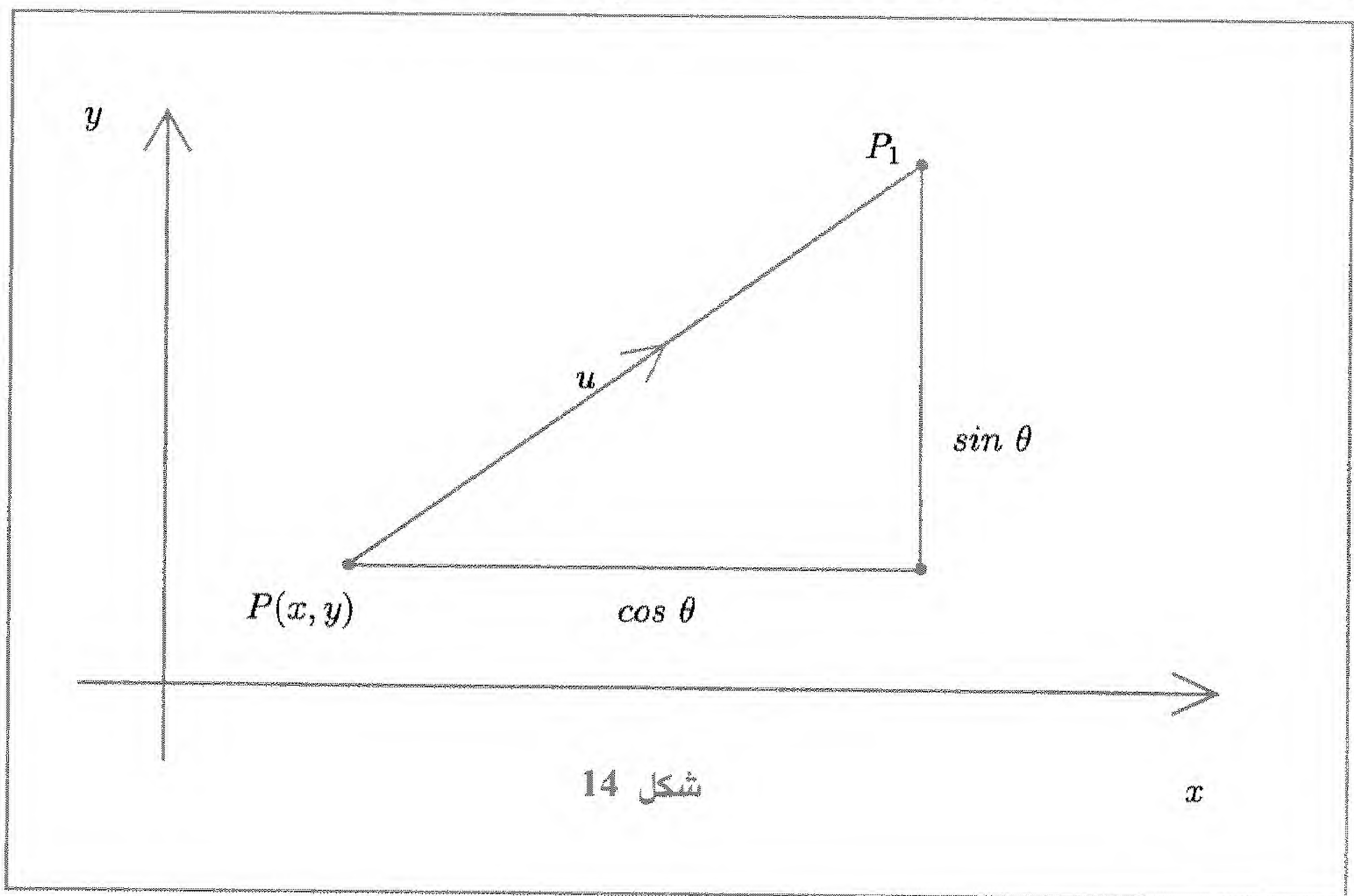
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$$

تكتب على الصورة التالية:

$$\frac{2xx_0}{a^2} + \frac{2yy_0}{b^2} = c(z + z_0)$$

10.1 المشتقة المتجهة

المشتقة الجزئية f_x كما سبق (راجع تعريف المشتقات الجزئية) يمكن اعتبارها في اتجاه محور x أي أن التغير يكون مستقيماً موازياً لمحور x. وكذلك المشتقة الجزئية f_y يمكن اعتبارها في اتجاه محور y.



شكل 14

ومن الطبيعي أن تعرف المشتقة المتجهة في اتجاه معين وليس بموازاة أحد المحاور. ولتوضيح ذلك، نعتبر الدالة $f(x, y)$ والنقطة $p(x, y)$ في المستوى xy ويحدد الاتجاه بالزاوية θ التي يصنعها المستقيم pp_1 مع الاتجاه الموجب لمحور x، أنظر الشكل (14).

ويعرف المتجه $\vec{u}$ بالعلاقة التالية:

$$\vec{u} = cos\ \theta i + sin\ \theta j$$

أي أن $\vec{u}$ متجه الوحدة.

تعريف 10

إذا كانت الدالة f في متغيرين فإن المشتقة المتجهة للدالة f تعرف كما يأتي:

$$D_u f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+\mu_1 h, y+\mu_2 h) - f(x,y)}{h}$$

ويشترط وجود النهاية.

ملاحظة

عندما $\theta = 0$ فإن $\mu_1 = 1$ و $\mu_2 = 0$ والاتجاه يكون هو الاتجاه الموجب لمحور x وهذا يتضمن أن المشتقة المتجهة تساوي تماماً المشتقة الجزئية f_x، وإذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$، فإن $\mu_1 = 0$ و $\mu_2 = 1$ ويكون الاتجاه هو الاتجاه الموجب لمحور y والمشتقة المتجهة تساوي f_y.

ويمكن إيجاد المشتقة بتطبيق النظرية التالية:

نظرية 5

إذا كانت الدالة $f(x,y)$ ومشتقتاها الجزئيتان متصلة، فإن:

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\mu_1 + f_y(x,y)\mu_2$$

حيث أن $\vec{u}$ متجه الوحدة.

$$\vec{u} = \mu_1 i + \mu_2 j$$

البرهان

أولاً نعرف الدالة $g(s)$ كما يأتي:

$$g(s) = f(x + s\mu_1,\ y + s\mu_2)$$

وبتطبيق قاعدة السلسلة

$$g'(s) = f_x(x + s\mu_1,\ y + s\mu_1)\mu_1 + f_y(x + s\mu_2, y + s\mu_2)\mu_2$$

وبذلك

$$g'(0) = f_x(x, y)\mu_1 + f_y(x, y)\mu_2 \qquad (1)$$

وحسب تعريف المشتقة، فإن

$$g'(0) = \lim_{s \to 0} \frac{g(s) - g(0)}{s - 0}$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{f(x + s\mu_1, y + s\mu_2) - f(x, y)}{s} = D_u f(x, y) \qquad (2)$$

من (1) و(2) نستنتج أن

$$D_u f(x, y) = f_x\mu_1 + f_y\mu_2$$

وتعريف المشتقة المتجهة للدالة في متغيرين يمكن أن يعمم إلى الدالة في ثلاثة متغيرات ويحدد الاتجاه في ثلاثة أبعاد بجيوب تمام الاتجاه أو بالمتجه.

$$\vec{u} = \mu_1 i = \mu_2 j + \mu_3 k$$

حيث أن: $\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = 1$

أي أن $\vec{u}$ متجه الوحدة.

تعريف 11

إذا كانت الدالة f في ثلاثة متغيرات، فإن المشتقة المتجهة للدالة f تعرف كما يأتي:

$$D_uf(x,y,z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+\mu_1 h, y+\mu_2 h, z+\mu_3 h)-f(x,y,z)}{h}$$

ويشترط وجود النهاية.

نظرية 6

إذا كانت الدالة $f(x,z,y)$ ومشتقاتها الجزئية متصلة وإذا كان المتجه

$$\vec{u}=\mu_1 i+\mu_2 j+\mu_3 k$$

حيث أن: $\mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2=1$

فإن المشتقة المتجهة تعرف كما يأتي:

$$D_uf(x,y,z)=f_x(x,y,z)\mu_1+f_y(x,y,z)\mu_2+f_z(x,y,z)\mu_3$$

والبرهان مشابه تماماً لبرهان النظرية السابقة.

وفيما يلي سنقدم بعض الأمثلة لتوضيح تطبيق النظريتين (5) و(6).

مثـال 1

إذا كانت $f(x,y)=x^2+y^2-x+5y$، فأوجد المشتقة المتجهة للدالة f في الاتجاه $\theta=\frac{\pi}{2}$، أوجد قيمتها عند النقطة $(1,-1)$.

الحــل

$$D_u f(x,y) = f_x cos\theta + f_y sin\theta$$

حيث أن $f_x = 2x - 1$ وعند النقطة $(1,-1)$ فإن $f_x = 1$ و $f_y = 2y + 5$ وعند النقطة $(1,-1)$ فإن $f_y = 3$.

وبذلك

$$D_u(x,y) = (1)\left(\frac{1}{2}\right) + (3)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 3.0981$$

مثــال 2

إذا كانت $f(x,y,z) = xe^{yz} + ye^{xz} + ze^{xy}$، فأوجد المشتقة المتجهة للدالة f عند النقطة $(1,0,2)$ في الاتجاه من النقطة $(1,0,2)$ إلى $(5,3,3)$.

الحــل

المتجه $\vec{u}$ يعطى كما يأتي

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{26}}\left((5-1)i + (3-0)j + (3-2)k\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{26}}(4i + 3j + k)$$

وتحسب المشتقات الجزئية كما يأتي:

$$f_x = e^{yz} + yze^{xz} + yze^{xy} \Rightarrow f_x(1,0,2) = 1$$

$$f_y = xze^{yz} + e^{xz} + xze^{xy} \Rightarrow f_y(1,0,2) = 2 + e^2 + 2 = 4 + e^2$$

$$f_z = xye^{yz} + xye^{xz} + e^{xy} \Rightarrow f_z(1,0,2) = 1$$

وهكذا

$$D_uf(1,0,2) = \frac{4}{\sqrt{26}} + (4+e^2)\ \frac{3}{\sqrt{26}} + \frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$= \frac{17+3e^2}{\sqrt{26}}$$

مثال 3

نفرض أن $f(x,y) = x^2 - 4xy$

أ) أوجد التدرج للدالة f عند النقطة $p(3,-2)$

ب) استخدم (أ) لإيجاد المشتقة المتجهة للدالة f عند $p(3,-2)$ في الاتجاه من $p(3,-2)$ إلى $p'(4,1)$.

جـ) ناقش الإجابة في الجزء (ب) إذا كانت $f(x,y)$ تمثل درجة الحرارة.

الحل

أ) التدرج:

$$\nabla f(x,y) = f_x i + f_y j = (2x-4y)i + (-4x)j$$

وعند النقطة $p(3,-2)$ نجد أن

$$\nabla f(3,-2) = 14i - 12j$$

والمتجه الذي يمثل الاتجاه من p إلى p'

$$\vec{a} = (4-3)i + (1+2)j = i + 3j$$

ب) متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه $\vec{a}$

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{10}}(i+3j)$$

والمشتقة المتجهة يمكن إيجادها كما يأتي:

$$D_u f(3,-2) = \nabla f(3,-2).\vec{u}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{10}} - \frac{36}{\sqrt{10}} = -\frac{22}{\sqrt{10}} = -6.957$$

جـ) إذا كانت $f(x,y)$ تمثل درجة الحرارة عند (x,y)، فإن درجة الحرارة تنقص بمعدل 6.957° لكل وحدة مسافة في الاتجاه pp'.

ملاحظة

المشتقة المتجهة يمكن أن تكتب على الصورة التالية:

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y).\vec{u}$$
$$= \|\nabla f(x,y)\|\ \|\vec{u}\|\ cos\ \phi$$

حيث ϕ الزاوية بين متجه الوحدة $\vec{u}$ وتدرج الدالة f، واضح من الصيغة الأخيرة أن المشتقة المتجهة تكون قيمة عظمى عندما $\phi = 0$، أي عندما يكون متجه الوحدة له نفس اتجاه تدرج الدالة f ويكون للمشتقة المتجهة قيمة صغرى عندما يكون متجه الوحدة له عكس اتجاه تدرج الدالة f، أي عندما $\phi = \pi$.

وبما أن $\|\vec{u}\| = 1$، واضح أيضاً أن القيمة العظمى والصغرى للمشتقة المتجهة تساوي القيمة المطلقة وسالبها على التوالي لتدرج الدالة f عند نقطة معينة.

مثـــال 4

أوجد المشتقة المتجهة $D_u f(x,y,z)$ عند النقطة $(0,2,-1)$ حيث أن:

$$f(x,y,z) = cos\ xy + sin\ xz$$

الحـل

نفرض أن متجه الوحدة $\vec{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$

وتحسب المشتقات الجزئية عند النقطة $(0, 2, -1)$ كما يأتي:

$$f_x = -y \ sin \ xy + z \ cos \ xz \Rightarrow f_x(0, 2, -1) = -1$$

$$f_y = -x \ sin \ xy \Rightarrow f_y(0, 2, -1) = 0$$

و
$$f_z = x \ cos \ xz \Rightarrow f_z(0, 2, -1) = 0$$

وهكذا
$$D_u f(0, 2-1) = -u_1$$

تمارين 10.1

أوجد المشتقة المتجهة عند النقطة المعطاة ومتجه الوحدة $\vec{u}$ في كل حالة.

1) $f(x, y, z) = x^2 + xy - xz + y^2$ عند النقطة $(2, 1, -2)$ حيث أن متجه الوحدة $\vec{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$.

2) $f(x, y, z) = x^2 y + xye^y - xye^z$ عند النقطة $(-2, 3, 0)$ حيث أن متجه الوحدة $\vec{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$.

3) $f(x, y, z) = tan \ xyz + sin \ xy - cos \ xz$ عند النقطة $(0, 1, 1)$ حيث أن:

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{26}} j + \frac{3}{\sqrt{26}} j + \frac{4}{\sqrt{26}} k$$

أوجد المشتقة المتجهة $D_u f$ عند النقطة p في اتجاه المتجه $\vec{a}$ وأوجد القيمة العظمى للمشتقة المتجهة عند النقطة p في التمارين التالية:

4) $f(x,y,z) = e^x cos\ yz + e^y sin\ xz + e^z sin\ xz$

حيث أن $p\left(1,0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\vec{a} = pp', p'\left(-1, 1\frac{\pi+2}{2}\right)$

5) $f(x,y,z) = ln\ (x^2+y^2) + ln\ \frac{x}{2y} + 2^{xyz}$

حيث أن $p(2,1,0)$, $\vec{a} = pp', p'(-4,-1,2)$.

6) $f(x,y,z) = z^2 tan^{-1}(x+y)$.

حيث أن $p(0,0,4)$, $\vec{a} = (6,0,1)$.

11.1 نظرية تيلور (Taylor's Theorem)

إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للاشتقاق $n+1$ مرة في الفترة التي تحتوي على a، فإن مفكوك الدالة $f(x)$ حول $x=a$ يكتب كما يأتي:

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{1}{2!}(x-a)^2f''(a)+...+\frac{1}{n!}(x-a)^nf^{(n)}(a)+R_n$$

حيث أن الباقي R_n يكتب كما يأتي:

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}f^{(n+1)}(\varepsilon)$$

حيث أن ε أي عدد يقع بين a وx.

ويمكن تعميم نظرية تيلور للدالة في عدة متغيرات.

نظرية تيلور للدالة في متغيرين

إذا كانت الدالة f في المتغيرين x ، y ومشتقاتها الجزئية إلى الرتبة $n+1$ متصلة في جوار النقطة (a,b)، فإن مفكوك الدالة $f(x,y)$ حول (a,b) يكتب كما يأتي:

$$f(x,y)=f(a,b)+\left(\hat{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\frac{1}{2!}\left(\hat{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{u}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)$$

$$+...+\frac{1}{n!}\left(\hat{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{u}\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a,b)+R_n$$

حيث أن الباقي R_n يكتب كما يأتي:

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(\hat{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{u}\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(\varepsilon,\eta)$$

حيث أن ε أي عدد بين a ، x وη أي عدد بين b وy.

و $\hat{\lambda}=x-a$, $\hat{u}=y-b$.

البرهان

تعرف الدالة $\phi(t)$ كما يأتي:

$$\phi(t) = f(u, v)$$

حيث أن $u = x + \lambda t$ و $v = y + \eta t$.

وبتطبيق الجزء الأول من قاعدة السلسلة نجد أن:

$$\phi'(t) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt} = \lambda\frac{\partial f}{\partial u} + u\frac{\partial f}{\partial v}$$

وعندما $t = 0$، فإن $u = x$ و $v = y$، أي أن:

$$\phi'(0) = \lambda\frac{\partial f}{\partial x} + u\frac{\partial f}{\partial y}$$

ويمكن إيجاد $\phi''(0)$ كما يلي:

$$\phi''(0) = \left(\lambda\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\lambda\frac{\partial f}{\partial x} + u\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad (1)$$

(راجع المشتقات الجزئية من الرتب العليا).

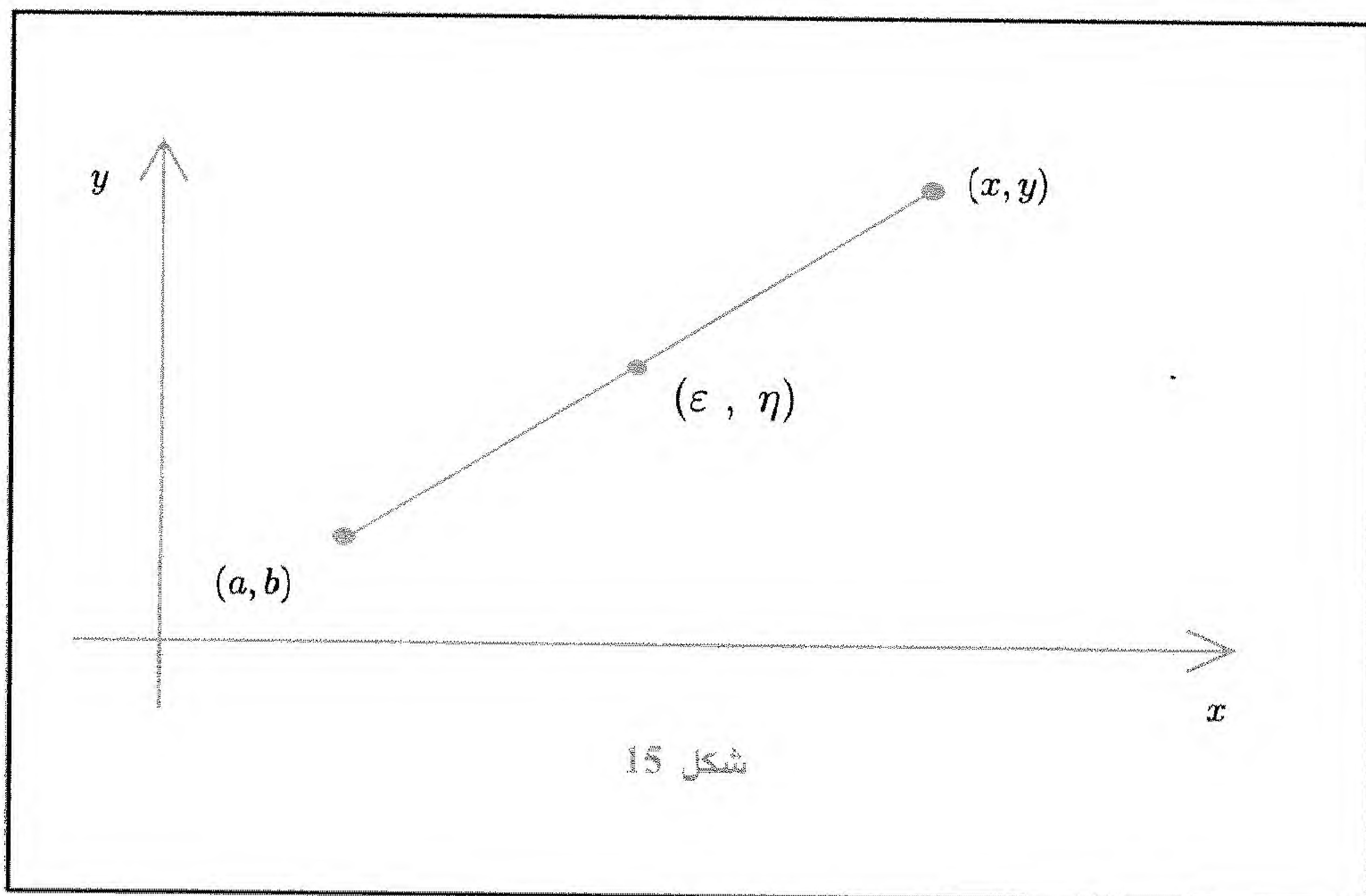
المعادلة (1) يمكن أن تكتب على الصورة التالية:

$$\phi''(0) = \left(\lambda\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x, y)$$

وبصورة عامة

$$\phi^{(n)}(0) = \left(\lambda\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y) \qquad (2)$$

والنقطة (ε, μ) تقع بين (a, b) و(x, y)، أنظر الشكل (15).



شكل 15

نفرض أن $d = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

ونعرف $\lambda = \dfrac{x-a}{d}$ و $\mu = \frac{y-b}{d}$

ومفكوك الدالة $\phi(t)$ حول نقطة الأصل تكتب كما تي:

$$\phi(t) = \phi(0) + \phi'(0)t + \frac{1}{2!}\phi''(0)t^2 + ... + \phi^{(n)}(0)t^n + R_n$$

وبالتعويض عن $\phi'(0), \phi(0)$ . . . الخ مع ملاحظة أن $\phi(d) = f(a + \lambda d, b + \mu d)$

نحصل على الصورة التالية:

$$f(a + \lambda d, b + \mu d) = f(a, b) + d\left(\lambda \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y}\right) f(a, b)$$

$$+\frac{1}{2!}d^2\left(\lambda \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a, b) + \frac{1}{3!}d^3\left(\lambda \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a, b) + ... \qquad (3)$$

وبالتعويض عن λ وμ في (3) نحصل على مفكوك الدالة $f(x, y)$

$$f(x,y)=f(a,b)+\left(\hat{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{u}\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\frac{1}{2!}\left(\hat{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{u}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)$$
$$+\frac{1}{3!}\left(\lambda\frac{\partial}{\partial x}+\hat{u}\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(a,b)+\ldots$$

ملاحظة:

$d\mu=\hat{\mu}$ و $d\lambda=\hat{\lambda}$

ويمكن تعميم نظرية تيلور للدالة في ثلاثة متغيرات أو أكثر بصورة مشابهة تماماً ونترك ذلك كتمرين للقارئ.

مثال 1

أوجد مفكوك تيلور للدالة $e^x\ arctan\ y$ حول النقطة $(0,1)$ إلى حدود الدرجة الثانية وأوجد الباقي.

الحل

مفكوك تيلور للدالة $f(x,y)=e^x\ arctan\ y$ يكتب على الصورة التالية:

$$f(x,y)=f(0,1)+\left(\hat{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mu}\frac{\partial}{\partial y}\right)f(0,1)+\frac{1}{2!}\left(\hat{\lambda}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mu}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,1)+R_2$$
$$=f(0,1)+\hat{\lambda}f_x(0,1)+\hat{u}f_y(0,1)+\frac{1}{2!}(\hat{\lambda}^2 f_{xx}(0,1)$$
$$+2\hat{\lambda}\hat{\mu}f_{xy}(0,1)+\hat{\mu}^2 f_{yy}(0,1))+R_2 \qquad (1)$$

حيث أن $\hat{\lambda}=x-0$ و $\hat{\mu}=y-1$

ونترك للقارئ أن يبين:

$$f_{xx}(0,1)=f_x(0,1)=\frac{\pi}{4}\ ,\ f(0,1)=\frac{\pi}{4}$$

$$f_{xy}(0,1) = \frac{1}{2} \quad , \quad f_{yy}(0,1) = -\frac{1}{2} \quad , \quad f_y(0,1) = \frac{1}{2}$$

وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على ما يأتي:

$$e^x \; arctan \; y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}x^2 + 2x(y-1)\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}(y-1)^2\right)$$

ويترك إيجاد (الباقي) كتمرين للقارئ.

تمارين 11.1

أوجد مفكوك تيلور للدوال التالية حول النقطة المبينة في كل حالة.

1) $sin\,(x+y)$ حول نقطة الأصل إلى حدود الدرجة الثالثة في (x, y) وقارن إجابتك بمفكوك ماكلورين للدالة $sin\,u$ حيث أن $u = x + y$.

2) $e^x \, arctan\, y$ حول النقطة $(1,1)$ إلى حدود الدرجة الثانية.

3) $x^3 + x^2y - yz^2 + z^3$ حول النقطة $(1,0,1)$.

4) e^{x+y} حول نقطة الأصل إلى حدود الدرجة الثانية.

5) أكتب مفكوك تيلور للدالة $f(x, y, u, v)$ حول النقطة (a, b, c, d) وكم عدد حدود المشتقات الجزئية ذات الرتبة الثانية.

12.1 القيم العظمى والصغرى للدالة في عدة متغيرات

لدراسة القيم العظمى والصغرى للدالة في متغيرين، نفرض أن الدالة $f(x,y)$ معرفة ومتصلة في النطاق D. يكون للدالة $f(x,y)$ قيمة عظمى نسبية عند النقطة (x_0,y_0) إذا كان $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$ ويكون للدالة قيمة صغرى نسبية إذا كان $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$ لكل (x,y) في جوار (x_0,y_0). وإذا كانت $f_x(x_0,y_0)$ موجودة، فإن $f_x(x_0,y_0) = 0$، وكذلك إذا كانت $f_y(x_0,y_0)$ موجودة، فإن $f_y(x_0,y_0) = 0$.

والنقاط (x,y) التي عندها يتلاشى كل من المشتقتين f_x وf_y تسمى النقاط الحرجة للدالة f، أي أن كل قيمة عظمى نسبية وكل قيمة صغرى تحدث عند النقطة الحرجة للدالة f إذا كانت المشتقتان f_x وf_y موجودتين.

نظرية 8

إذا كانت الدالة f في متغيرين متصلة في النطاق D. حيث D منطقة مغلقة في المستوى $x\,y$، فإنه توجد نقطة واحدة على الأقل في D حيث يكون للدالة f قيمة عظمى، وتوجد نقطة واحدة على الأقل في D حيث يكون للدالة f قيمة صغرى.

ملاحظة

يمكن تعميم النظرية السابقة إلى الدالة في ثلاثة متغيرات أو أكثر.

نظرية 9

إذا كانت $f(x,y)$ معرفة في R حيث (x_0,y_0) نقطة داخلية وإذا كانت $f_x(x_0,y_0)$ و$f_y(x_0,y_0)$ معرفتين، و$f(x,y) \le f(x_0,y_0)$ لكل $(x,y) \in R$ أي أن $f(x_0,y_0)$ قيمة عظمى نسبية، فإن $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$.

البرهان

حسب تعريف المشتقة الجزئية

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

ومن الفرض: $f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0) \le 0$ وبذلك توجد حالتان.

الحالة الأولى إذا كانت $\Delta x > 0$ فإن $\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} \le 0$

الحالة الثانية إذا كانت $\Delta x < 0$ فإن $\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} \ge 0$

وبما أن $f_x(x_0,y_0)$ موجودة، فإن: $f_x(x_0,y_0) = 0$ (لماذا؟).

ويمكن بيان أن $f_y(x_0,y_0) = 0$ بطريقة مشابهة تماماً.

وتكون النتيجة صحيحة إذا كان للدالة قيمة صغرى نسبية.

نظرية 10 (اختبار المشتقة الثانية)

إذا كانت الدالة f ومشتقاتها الجزئية إلى الرتبة الثالثة متصلة قرب النقطة (a,b) حيث أن $f_x = (a,b) = f_y(a,b) = 0$، فإن:

1) توجد قيمة صغرى نسبية إذا كان $AC - B^2 > 0$ و $A > 0$

2) توجد قيمة عظمى نسبية إذا كان $AC - B^2 > 0$ و $A < 0$

3) نقطة سرج إذا كان $AC - B^2 < 0$

4) لا توجد معلومات، أي أن طبيعة النقطة الحرجة غير محددة إذا كان $AC - B^2 = 0$

حيث أن $A = f_{xx}(a, b)$, $B = f_{xy}(a, b)$ و $C = f_{yy}(a, b)$

البرهان

مفكوك تيلور للدالة $f(x, y)$ حول النقطة (a, b) يكتب على الصورة التالية:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{2!}\left[A(x-a)^2 + 2B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2\right] + R_2$$

حيث أن الباقي R_2 يكتب على الصورة التالية:

$$R_2 = \frac{1}{3!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^3 f(\varepsilon, \eta)$$

(راجع البند السابق).

ملاحظة

لم يظهر الحد الثاني في مفكوك تيلور لأن $f_x = f_y = 0$ عند النقطة الحرجة (a, b)

نفرض أن $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ ، $\lambda = \frac{x-a}{r}$ ، $\mu = \frac{y-b}{r}$

وبذلك $\lambda^2 + \mu^2 = 1$

ويمكن كتابة مفكوك الدالة $f(x, y)$ على الصورة التالية:

$$f(x,y)-f(a,b)=\frac{1}{2}r^2(A\lambda^2+2B\lambda\mu+C\mu^2+rp) \qquad (1)$$

حيث أن $p=\frac{1}{3}\left[\lambda\frac{\partial}{\partial x}+\mu\frac{\partial}{\partial y}\right]^3 f(\delta,\eta)$

وبذلك يتحدد سلوك المقدار $(f(x,y)-f(a,b))$ سالباً أو موجباً من المقدارين $(A\lambda^2+2B\lambda\mu+C\mu^2)$ و (rp).

وباختيار r صغيرة جداً يمكن إهمال المقدار $r\,p$

والآن ندرس سلوك المقدار

$$g(\lambda)=A\lambda^2+2B\lambda\mu+C\mu^2$$

المشتقة الأولى للدالة $g(\lambda)$ بالنسبة للمتغير λ

$$g_\lambda=2A\lambda+2B\mu \qquad (2)$$

والمشتقة الثانية $g_{\lambda\lambda}=2A$

وبذلك القيم القصوى للدالة $g(\lambda)$ تحدد من إشارة المقدار A.

الحالة الأولى إذا كانت $A>0$، أي أنه توجد قيمة صغرى نسبية للدالة $g(\lambda)$.

ومن المعادلة (2) نستنتج أن القيمة الحرجة هي

$$\lambda=-\frac{B\mu}{A}$$

وليس من الصعب أن نبين:

$$g\left(-\frac{B\mu}{A}\right)=\frac{\mu^2(AC-B)^2}{A} \qquad (3)$$

وإذا كان المقدار $AC-B^2>0$، فإن القيمة الصغرى للدالة $g(\lambda)$ موجبة ولذلك $g(\lambda)>0$.

ومن المعادلة (1) نستنتج أن:

$$f(x,y)-f(a,b)>0$$

وهذا يعني وجود قيمة صغرى.

وإذا كانت $A < 0$ فإن الدالة $g(\lambda)$ يكون لها قيمة عظمى سالبة،

أي أن $g(\lambda) < 0$ وبذلك:

$$f(x, y) - f(a, b) < 0$$

وهذا يتضمن وجود قيمة عظمى.

وإذا كان المقدار $(AC - B^2)$ سالباً فإن (3) تكون أحياناً سالبة وأحياناً أخرى موجبة ويكون للدالة شكل سرج قرب النقطة (a, b).

إذا كان $AC - B^2 = 0$ فإن طبيعة النقطة الحرجة غير معروفة أو غير محددة.

وفيما يلي سنقدم بعض الأمثلة لتوضيح نظرية اختبار المشتقة الثانية.

مثال 1

أوجد القيم القصوى للدالة f حيث أن:

$$f(x, y) = x^2 + 3x - 6xy + y^3 + 6y - 7$$

الحل

القيم القصوى تعنى القيم العظمى والصغرى ولإيجاد القيم القصوى نتبع الخطوات التالية:

أولاً النقاط الحرجة.

توجد النقاط الحرجة بحل المعادلتين التاليتين آنياً.

$$f_x = 2x - 6y + 3 = 0 \qquad (1)$$

$$f_y = 3y^2 - 6x + 6 = 0 \qquad (2)$$

من المعادلة الأولى $2x = 6y - 3$ وهذا يتضمن $x = 3y - \frac{3}{2}$، وبالتعويض في المعادلة الثانية نجد أن:

$$y^2 - 6y + 5 = 0$$

أي أن $y = 1$ و$y = 5$ وبالتعويض في المعادلة الأولى نحصل على النقطتين الحرجتين التاليتين:

$$(1.5,\ 1) \quad \text{و} \quad (13.5,\ 5)$$

ولاختبار هاتين النقطتين لا بد من إيجاد المشتقات الجزئية ذات الرتبة الثانية

$$f_{xx} = 2 \ , \ f_{xy} = -6 \quad \text{و} \quad f_{yy} = 6y$$

عند النقطة $(1.5,\ 1)$:

$$A = f_{xx} = 2 \ , \ B = f_{xy} = -6 \quad \text{و} \quad C = f_{yy} = 6$$

وبذلك

$$AC - B^2 = 12 - 36 < 0$$

وهذا يتضمن حسب الجزء الثالث من النظرية أن النقطة $(1.5, 1)$ هي نقطة سرج (saddle point).

وعند النقطة $(13.5, 5)$:

$$A = 2 \ , \ B = -6 \quad \text{و} \quad C = 30$$

وهكذا $AC^2 - B^2 = 60 - 36 > 0$ وبما أن $A > 0$

إذن حسب الجزء الأول من النظرية توجد قيمة صغرى نسبية وهي

$$f(13.5, 5) = 34.25$$

مثـال 2

أوجد النقاط الحرجة للدالة f حيث أن:

$$f(x, y) = sin\ x + sin\ y$$

وناقش كلا منها.

الحــل

يمكن الحصول على النقاط الحرجة بحل المعادلتين التاليتين آنياً:

$$f_x = cos\ x = 0 \qquad (1)$$

$$f_y = cos\ y = 0 \qquad (2)$$

من المعادلة الأولى: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ حيث أن n عدد صحيح.

ومن المعادلة الثانية: $y = \frac{\pi}{2} + m\pi$ حيث أن m عدد صحيح.

المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية:

$$f_{yy} = -sin\ y \quad \text{و} \quad f_{xy} = 0 \quad \text{و} \quad f_{xx} = -sin\ x$$

حيث أن: $A = f_{xx}$ و $B = f_{xy}$ و $C = f_{yy}$.

(1) إذا كانت n وm فرديتين فإن $A = c = 1$ وتوجد قيمة صغرى.

(2) إذا كانت n وm زوجيتين فإن $A = c = -1$ وتوجد قيمة عظمى.

(3) إذا كانت n فردية وm زوجية فإنه توجد نقطة سرج.

(4) إذا كانت $n = m = 0$ فإنه توجد قيمة عظمى.

مثــال 3

أوجد الأعداد الثلاثة الموجبة التي مجموعها 48 وحاصل ضربها أكبر ما يمكن.

الحــل

نفرض أن الأعداد هي z, y, x

مجموع الأعداد الثلاثة:

$$x + y + z = 48 \qquad (1)$$

ونفرض أن حاصل ضرب الأعداد الثلاثة دالة في x وy وz حيث أن:

$$f(x,y,z) = x\,y\,z \tag{2}$$

وبالتعويض عن z من المعادلة الأولى في المعادلة الثانية نحصل على دالة جديدة في المتغيرين x وy حيث أن: $f(x,y) = x\,y(48 - x - y)$

النقاط الحرجة:

يمكن الحصول عليها بحل المعادلتين:

$$f_x = y(48 - x - y) + xy(-1) = 0$$

أو

$$48y - 2xy - y^2 = 0 \tag{3}$$

و

$$f_y = x(48 - x - y) + xy(-1) = 0$$

أو

$$48x - 2xy - x^2 = 0 \tag{4}$$

وبضرب المعادلة (3) في x والمعادلة (4) في $-y$ وبالجمع نحصل على المعادلة التالية:

$$-x^2y + xy^2 = 0$$

أو

$$xy(y - x) = 0$$

وهذا يتضمن $x = y$ وتهمل الحالة الأخرى.

وبالتعويض في المعادلة (3) نجد أن:

$$48x - x^2 - 2x^2 = 0$$

أو

$$3x^2 - 48x = 0$$

ومنها

$$3x(x-16)=0 \Longrightarrow x=16$$

وتهمل الحالة الأخرى أيضاً.

وبالتعويض في المعادلة الأولى (3) نجد أن:

$$32+z=48 \Longrightarrow z=16$$

وهكذا $x=y=z=16$

تمارين 12.1

أوجد القيم القصوى للدوال التالية:

1) $f(x,y)=x^2-3xy-y^2+2y$

2) $f(x,y)=x^3+3xy-y^3$

3) $f(x,y)=4x^2-2x^2y+y^2$

4) $f(x,y)=e^x sin\ y$

5) $f(x,y)=sin\ x+sin\ y+sin(x+y)$

6) $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y}$

7) $f(x,y)=e^{-x}sin^2y$

8) $f(x,y)=3-x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$

9) $f(x,y)=x^2-6x\ cos\ y+9$

10) أوجد أقرب مسافة من النقطة $(2,1,-1)$ إلى المستوى $4x-3y+z=5$

11) أوجد أقصر مسافة بين المستويين $2x+3y-z=2$ و $2x+3y-z=4$

12) أوجد الأعداد الثلاثة الموجبة التي مجموعها 1000 وحاصل ضربها أكبر ما يمكن.

13) أوجد أبعاد متوازي المستطيلات الذي حجمه أكبر ما يمكن وأوجهه موازية للمحاور ويمكن رسمه داخل المجسم الناقص $6x^2+4y^2+9z^2=144$

14) أوجد المتجه في ثلاثة أبعاد الذي مقياسه 8 ومجموع مركباته أكبر ما يمكن.

13.1 القيم القصوى ومضروبات لاجرانج (Lagrange Multipliers)

معظم المسائل العلمية التي لها أهمية كبيرة، تشمل إيجاد القيم العظمى أو الصغرى للدوال في عدة متغيرات حيث أن العلاقة بين متغيراتها تتحدد من معادلة واحدة أو أكثر وتسمى الشروط الجانبية. ومن أحد الأمثلة على ذلك إيجاد نصف قطر أكبر كرة مرسومة داخل مجسم ناقص: $x^2 + 2y^2 + 5z^2 = 10$ وهذا يكافئ إيجاد القيمة العظمى للدالة $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ الخاضعة للشرط الجانبي $x^2 + 2y^2 + 5z^2 = 10$.

وللتعامل مع المسائل من هذا النوع يمكن التخلص من بعض المتغيرات واختزال مسألة القيم القصوى المعتادة، كما فعلنا في المثال (3) البند السابق. إلا أن هذه الطريقة غير مجدية دائماً وكثيراً ما نحصل على دالة معقدة يصعب التعامل معها. ونقدم فيما يلي طريقة لاجرانج وهي عادة أكثر ملاءمة حيث يتم التعامل مع المتغيرات بطريقة متماثلة.

ولتوضيح طريقة لاجرانج نعتبر الدالة $w = f(x, y, z)$ الخاضعة للشرط الجانبي $\phi(z, y, z) = 0$.

يمكن إيجاد النقاط الحرجة كما يلي:

1 ـ كوّن الدالة F حيث أن:

$$F(x, y, z, \lambda) = f(z, y, z) + \lambda\phi(x, y, z)$$

2 ـ أوجد النقاط الحرجة للدالة F في المتغيرات λ, z, y, z كما سبق، ويمكن تعميم طريقة لاجرانج للدالة الخاضعة لعدة شروط جانبية.

مثـال 1

أوجد أبعاد الصندوق المستطيل المفتوح من أعلى والذي يكون حجمه أكبر ما يمكن إذا كانت مساحته السطحية 12

الحـــل

نفرض أن حجم الصندوق

$$V(x, y, z) = x\ y\ z \quad (1)$$

المساحة السطحية للصندوق تعطى بالمعادلة التالية:

$$x\ y + 2\ x\ z + 2\ y\ z = 12 \quad (2)$$

بتطبيق طريقة لانجرانج

1 ـ كون الدالة F حيث أن:

$$F(x, y, z) = xyz + \lambda(12 - xy - 2xz - 2yz)$$

2 ـ يمكن إيجاد النقاط الحرجة بحل المعادلات التالية آنياً.

$$F_x = yz + \lambda(-y - 2z) = 0 \quad (3)$$

$$F_y = xz + \lambda(-x - 2z) = 0 \quad (4)$$

$$F_z = xy + \lambda(-2x - 2y) = 0 \quad (5)$$

$$F_\lambda = 12 - xy - 2xz - 2yz = 0 \quad (6)$$

ملاحظة: المعادلة الأخيرة هي نفسها المعادلة (2).

وبضرب المعادلات (3) و(4) و(5) في x وy وz على التوالي، وبطرح المعادلة (5) من المعادلة (4) نحصل على المعادلة التالية:

$$\lambda(2xz - xy) = 0 \quad (7)$$

وبطرح المعادلة (5) من المعادلة (3) نحصل على المعادلة التالية:

$$\lambda(2yz - xy) = 0 \qquad (8)$$

من المعادلة (7) نستنتج أن $y = 2z$ ومن المعادلة (8) نستنتج أيضاً $x = 2z$

وبالتعويض في المعادلة (2) نجد أن $z = 1$

وبذلك تكون أبعاد الصندوق:

$$z = 1 \quad ، \quad y = 2 \quad ، \quad x = 2$$

مثـال 2

أوجد النقاط الحرجة للدالة f حيث أن

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

الخاضعة للشرط الجانبي

$$x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

الحـل

نكون الدالة

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^3 + y^3 - 6xy)$$

وتوجد النقاط الحرجة بحل المعادلات الآنية التالية:

$$F_x = 2x + \lambda(3x^2 - 6y) = 0$$

$$F_y = 2y + \lambda(3y^2 - 6x) = 0$$

$$F_\lambda = x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

من المعادلتين الأوليين نجد أن:

$$\lambda = \frac{-2x}{3x^2 - 6y} = \frac{-2y}{3y^2 - 6x}$$

أي أن: $x(3y^2 - 6x) = y(3x^2 - 6y)$

ومنها $x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 = 0$

وبحل المعادلتين:

$$x^2y - xy^2 + 2x^2 - 2y^2 = 0$$

$$x^3 + y^3 - 6xy = 0$$

المعادلة ما قبل الأخيرة يمكن أن تكتب على الصورة التالية:

$$(x - y)(2x + 2y + xy) = 0$$

وهذا يتضمن $x = y$ وبالتعويض في المعادلة $x^3 + y^3 - 6xy = 0$ نجد أن:

$$2x^3 - 6y^2 = 0$$

$$x^2(2x - 6) = 0$$

وهذا يتضمن $x = 0$ و$x = 3$

وتهمل الحالة $2x + 2y + xy = 0$ (لماذا؟).

ويترك للقارئ مناقشة قيمتي الدالة عند $x = y = 0$ و$x = y = 3$.

تمارين 13.1

ناقش القيم القصوى للدوال التالية:

1) $f(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 4z^2$ حيث أن $2x + 4y - 6z + 5 = 0$

2) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ حيث أن $x + 3y - 2z = 4$

3) $f(x, y, z, t) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$ حيث أن:

$x + y + z + 2t = 1$ و $2x + y - z + 4t = 2$ و $x - y + z - t = 4$

4) أوجد النقاط الحرجة للدالة $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$ حيث أن النقطة (x, y, z) تقع على السطح $x^2yz = 1$.

5) أوجد القيم القصوى للدالة $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ حيث أن النقطة (x, y, z) تحقق المعادلة $x + y + z = 4$

6) أوجد أبعاد متوازي المستطيلات الذي حجمه أكبر ما يمكن وجوانبه موازية للمحاور ويمكن رسمه داخل المجسم الناقص:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

تمارين الفصل الأول

أوجد نطاق الدوال التالية:

1) $f(x,y,z)=ln(x-y+z)$

2) $g(x,y)=sin^{-1}(x-y)$

3) $f(x,y)=(36-4x^2+9y^2)^{\frac{1}{2}}$

4) $f(x,y,z)=\dfrac{sec\ z}{x-y}$

أوجد النهايات التالية إذا كانت موجودة وبيّن السبب إذا كان غير ذلك.

5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

6) $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,\sqrt{2})}\dfrac{x^4+x^2y^2-6y^4}{x^2-2y^2}$

7) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(-1,1.2)}\dfrac{2x^2+4xy-6x^3z^2}{x\ y\ z^2}$

8) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$

9) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

10) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\ sin\ \dfrac{1}{y}+y\ sin\ \dfrac{1}{x}$

11) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(1+y^2)sin\ x}{x}$

12) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$

أوجد المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدوال التالية:

13) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x^2+2y^2}$

14) $f(x,y,z)=\dfrac{cos\ z^4}{x\ y^2}$

15) $g(x,y,z)=e^{x^2}ln(y_2-3z)$

16) $f(x,y)=cos[(xy)^2]$

17) $h(x,y)=(cos\ xy)^2$

18) $h(x,y,t)=x\ ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$

19) $V(v,w)=v^2cos\ w+w^2\ cos\ v$

20) أوجد $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ إذا كان:

أ) $z=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ ب) $z=y\ sin\ xy$

أوجد كل المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدوال التالية:

(21 $f(x,y) = 4x^3 - 3y^2$

(22 $f(x,y) = arcsin(x^2 - y^2)$

(23 $f(x,y,z) = x^2 e^{y^2 - z^2}$

(24 إذا كان $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ فبين أن $\nabla^2 u = 0$

(25 أوجد dw إذا كان $w = y^3 tan^{-1} x^2 + 2x - y$

(26 نفرض أن $u = x\,y\,z$ إذا كان x و y متغيرين مستقلين فبيّن:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x\,y\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + y\,z$$

وإذا كانت المتغيرات z, y, x مستقلة فبين أن $\frac{\partial u}{\partial x} = y\,z$

(27 إذا كان $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ فبين أن:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2$$

(28 أوجد $\frac{\partial z}{\partial u}$ و $\frac{\partial z}{\partial v}$ إذا كان:

$$z = sin\;xy - y^2 cos\;x$$

حيث أن $x = u^2$ و $y = \frac{1}{v}$

(29 إذا كان $z = f(x^2 + y^2)$ فبين أن:

$$y\,\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

(30 أوجد $\frac{d\,w}{d\,t}$ إذا كان $w = \sqrt{x^2 + y^2 z^4}$, $x = 2t$, $y = t^3$, $z = \frac{1}{t}$

(31 إذا كان $\left(x\,y\,z + \frac{1}{x\,y\,z} = z^3\right)$ فاستخدم التفاضل الضمني لإيجاد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$

(32 إذا كانت $z = f(x,y)$ تحقق $x^2 y + z\;cos\;y - xz^3 = 0$ فأوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$

(33 إذا كان $w = cos(x+y) + sin(x-y)$ فبين أن:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

(34 إذا كانت c ثابتاً و $w = 5cos(3x+3ct) - 7sinh(4x-4ct)$ فبين أن:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

(35 أوجد Δw وdw إذا كان $w = x^2 + 3xy - y^3$. استخدم Δw لإيجاد التغير بالضبط واستخدم dw لإيجاد القيمة التقريبية في w إذا تغيرت النقطة (x,y) من $(-1,2)$ إلى $(-1.1, 1.9)$.

استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد حل المسائل من $(36-38)$.

(36 إذا كانت $s = uv + vw - uw$ و $u = 2x+3y$ و $v = 4x - y$ و $w = -x + 2y$ فأوجد $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$

(37 إذا كانت $z = sin\ xy - y^3 tan\ x$ فأوجد $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ حيث أن $x = u^2 v$ و $y = \frac{1}{v}$

(38 إذا كانت $w = x^3 + y\ cos\ yz$ فأوجد $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$ حيث أن:

$$z = u^2 - v^2 \ , \ y = u\ v \ , \ x = u^2 + v^2$$

أوجد المشتقات المتجهة للدالة f عند النقطة P في اتجاه $\vec{a}$

(39 $f(x,y) = 4 - x^2 + 3y^2$ ، $P = (-1,1)$ ، $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i+j)$

(40 $f(x,y,z) = csc(yz+x)$ ، $P = \left(\pi, -\frac{\pi}{4}, 1\right)$ ، $\vec{a} = -3i - j - 2k$

(41 $f(x,y) = 3x^2 - y^2 + 5xy$ ، $P = (2,-2)$ ، $\vec{a} = -3i - 4j$

ما هو معدل أكبر زيادة للدالة f عند $(2,-2)$؟

(42 نفرض أن درجة الحرارة عند النقطة (x,y,z) معرّفة كما يلي:

$$T(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 - 4z$$

أوجد معدل التغير للدالة T عند النقطة $(-1,-3,2)$ في الاتجاه من النقطة المذكورة إلى النقطة $(-4,1,-2)$ ما هو أكبر معدل تغير T عند النقطة $(-1,-3,2)$؟

43) أوجد معادلة المستوى المماس والمستقيم المتعامد لرسم السطح:

$z = 4x^2 - 2y^2$ عند النقطة $(-2,-1,3)$

44) بيّن أن معادلة كل مستوى مماس للمخروط:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

يمر بنقطة الأصل.

45) بيّن أن معادلة المستوى للمماس للمجسم:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

عند النقطة (x_0, y_0, z_0) تكون $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$

46) بيّن أنه يكون للسطحين:

$$z = x^2 + 4y^2 \quad \text{و} \quad z = 4x + y^2 - 4$$

المستوى المماس نفسه عند النقطة $(2,0,4)$.

47) إذا كانت $z = f\left(\frac{x-y}{y}\right)$ فبين أن $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

48) إذا كانت f معرفة كما يلي:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

فأوجد $f_{yx}(0,0)$ و $f_{xy}(0,0)$

49) أوجد الدالة $f(x,y)$ التي تفاضلها

$$df = \left(\frac{y}{x} + e^y\right)dx + (ln\ x + 2y + x\ e^y)dy$$

أو بيّن أنه لا توجد دالة تحقق ذلك.

50) نفرض أن:

$$f(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{sin\ 6r}{6r} & ; \quad r \neq 0 \\ 1 & ; \quad r = 0 \end{cases}$$

أوجد $\lim_{r\to 0} f(r,\theta)$, $f_r(0,0)$, $f_\theta(r,\theta)$

51) إذا كانت $f(x,y) = 0$ فأوجد $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

أوجد القيم القصوى للدوال التالية:

52) $f(x,y) = x^2 - 6x\ cos\ y + 15$

53 $f(x,y,z) = x + y + z\ ;\ x^2 + y^2 + z^2 = 25$

54) $f(x,y,z,t) = x\ y\ z\ t\ ;\ x - z = 2\ ,\ y^2 + t = 4$

55) $f(x,y) = cos\ x + cos\ y$

56) $f(x,y) = sin\ x + sin\ y + sin(x+y)\ ;\ 0 \leq x \leq 2\pi\ ,\ 0 \leq y \leq 2\pi$

57) الدالة f معرفة وقابلة للتفاضل لكل x و y وتكون متجانسة من الدرجة n (n عدد صحيح غير سالب) إذا كان $f(tx,ty) = t^2 f(x,y)$ لكل y,x,t لهذه الدالة برهن ما يأتي:

أ) $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = nf(x,y)$

ب) $x^2\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + 2xy\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + y^2\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = n(n-1)f$

حيث أن f لها مشتقات جزئية متصلة ومن الرتبة الثانية.

جـ) الدالة المتجانسة من الدرجة صفر تكون ثابتة.

58) برهن على صحة نظرية القيمة المتوسطة للدالة في متغيرين:

$$f(x+h,y+k)-f(x,y)=f_x(x+\theta h,y+\theta k)h+f_y(x+\theta h,y+\theta k)k$$

حيث أن $0<\theta<1$ مع شروط ملائمة للدالة f اذكرها.

(إيضاح: طبق نظرية القيمة المتوسطة في متغير واحد $(F(t)=f(x-ht,y=kt)$.

59) إذا كانت المعادلة $F(x,y,z)=0$ تعرف z كدالة في x وy ولتكن $z=f(x,y)$ و $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ موجودتين. نفرض أيضاً الدالة نفسها $F(x,y,z)=0$ تعرّف x كدالة في y وz ولتكن $x=g(y,z)$ مع وجود المشتقتين $\frac{\partial g}{\partial y}$ و$\frac{\partial g}{\partial z}$، برهن على ما يأتي:

$$\frac{\partial g}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$$

وعبّر عن $\frac{\partial g}{\partial z}$ بدلالة $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$.

60) سطح معرّف بالمعادلة:

$$z=x^3+y^3-9xy+27$$

ناقش القيم القصوى على رسم السطح.

61) إذا كانت z دالة في x وy معرّفة بالمعادلة

$$sin(x+y)+sin(y+z)=1$$

فأوجد $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ بدلالة z,y,x.

62) صندوق مفتوح من أعلى حجمه 1728 بوصة مكعبة، أوجد أبعاد الصندوق التي تجعل التكلفة أقل ما يمكن.

أ) إذا كانت تكلفة المادة التي تصنع منها القاعدة تساوي 16 ضعف المادة التي تصنع منها الجوانب لكل وحدة مساحة.

ب) إذا كانت تكلفة المادة التي تصنع منها القاعدة تساوي ضعفي تكلفة المادة التي تصنع منها الجوانب لكل وحدة مساحة.

63) أكتب معادلة لابلاس: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ بالإحداثيات القطبية.

(**إيضاح**: بيّن أن $r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$)

64) إذا كانت y معرفة كدالة في x بالمعادلة $f(x,y)=0$ فبيّن أن:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{f_x^2\ f_{yy}-2f_x\ f_y\ f_{xy}+f_y^2\ f_{xx}}{f_y^3}$$

65) إذا كانت z معرفة كدالة في x وy بالمعادلة $f(x,y,z)=0$ فبيّن أن:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{(f_x\ f_y\ f_{zz}-f_x\ f_z\ f_{yz}-f_y\ f_z\ f_{xz}+f_z^2\ f_{xy})}{f_z^3}$$

66) ناقش طبيعة النقاط الحرجة للدوال التالية:

أ) $f(x,y)=x^2-y^2$

ب) $f(x,y)=3xy-x^2-y^2$

جـ) $f(x,y)=4x^2-12xy+9y^2$

د) $f(x,y)=x^4-y^4$

الفصل الثاني

التكامل الثنائي

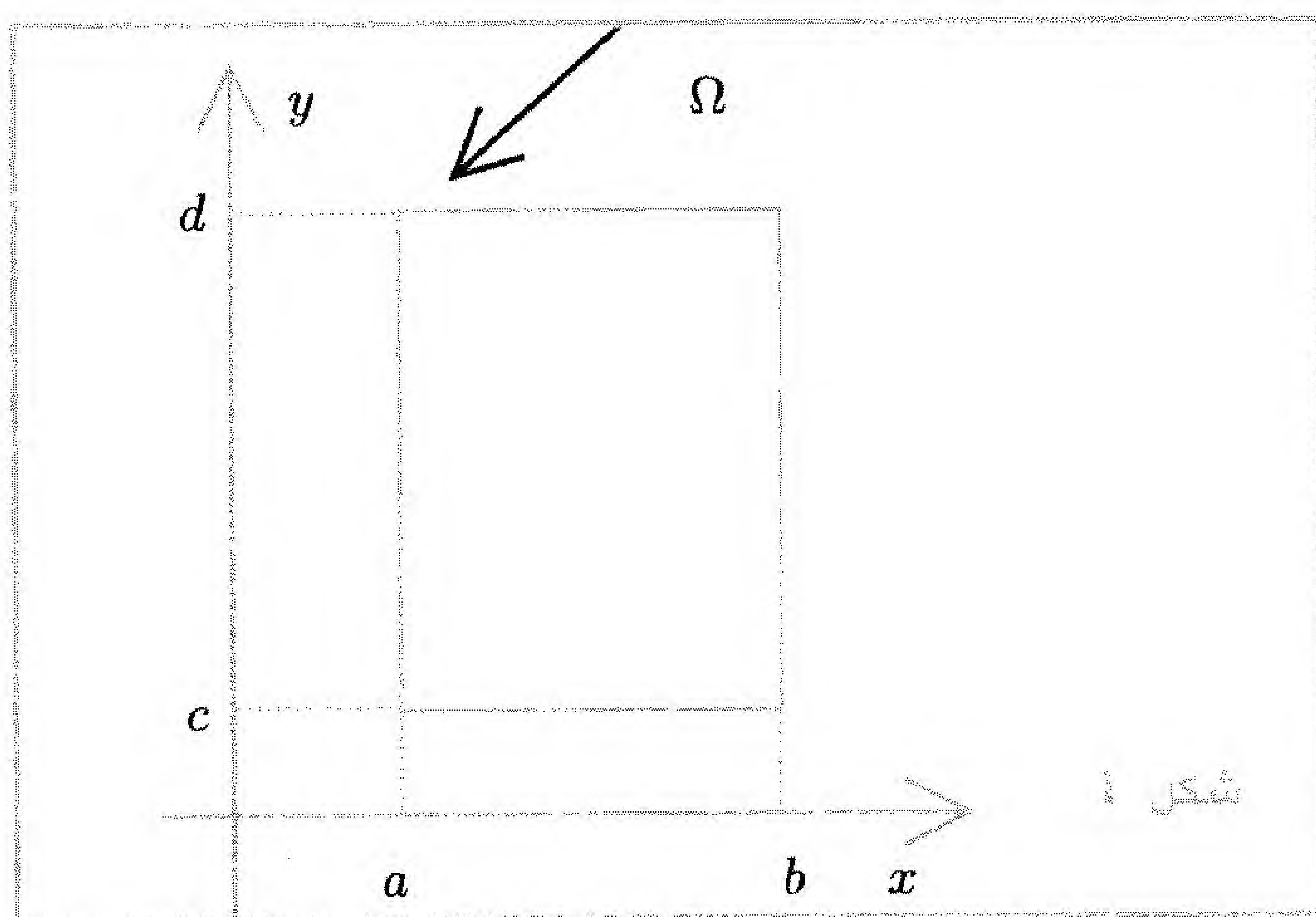
2 . 1 الحجم تحت سطح والتكامل الثنائي

التكامل المفرد $\int_a^b f(x)dx$ يمثل المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ وفوق محور x في الفترة $[a, b]$ حيث أن $f(x) \geq 0$، والتكامل الثنائي يعتبر تعميماً للتكامل المفرد أي يمثل الحجم تحت سطح في R^3.

ونعتبر حالة بسيطة. نفرض أن Ω تمثل مستطيلاً في R^2:

$$\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b \ , \ c \leq y \leq d\}$$

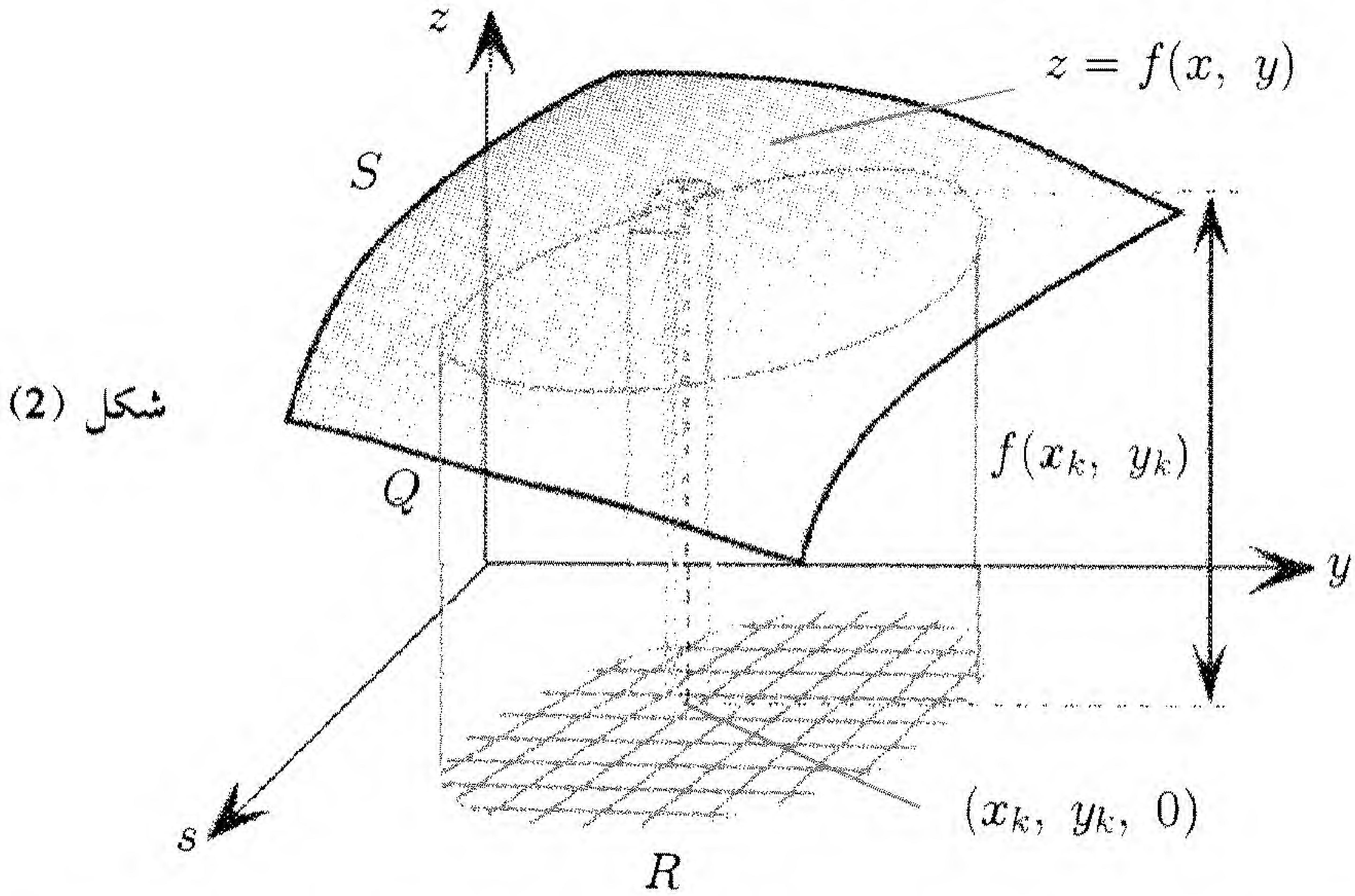
أنظر الشكل (1).



شكل 1

ونفرض أن $z = f(x, y)$ دالة متصلة وغير سالبة على المنطقة Ω، أي أن $f(x, y) \geq 0$ لكل $(x, y) \in \Omega$. والسؤال الآن ما هو الحجم تحت السطح $z = f(x, y)$ وفوق المستطيل Ω؟

وللإجابة عن السؤال نتبع الخطوات التالية:



شكل (2)

(1) نقسم المستطيل Ω إلى مستطيلات فرعية بمستقيمات موازية للمحورين حيث أن:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

و

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{m-1} < y_m = d$$

ويمكن تعريف Δx و Δy كما يلي:

$$\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

و

$$\Delta y = y_i - y_{i-1} = \frac{b-a}{m}$$

وهكذا يمكن تعريف المستطيلات الفرعية كما يلي:

$$\Omega_{ij} = \{(x,y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i \ , \ y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

حيث أن $i = 1, 2, ..., n$ و $j = 1, 2, ..., m$

أي أنه توجد $n\,m$ من المستطيلات الفرعية.

(2) نقدر الحجم تحت السطح وفوق كل مستطيل فرعي:

إذا كانت (x_i^*, y_j^*) نقطة في Ω_{ij}، فإن الحجم تحت السطح وفوق المستطيل Ω_{ij} تكون قيمته التقريبية كما يلي:

$$V_{ij} \approx f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta x \Delta y = f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta A \qquad (*)$$

حيث أن $\Delta A = \Delta x \Delta y$ تمثل مساحة المستطيل Ω_{ij}.

(3) وبجمع الحجوم التقريبية نحصل على الحجم الكلي:

$$V = V_{11} + V_{12} + ... + V_{1m} + V_{21} + V_{22} + ... + V_{2m} + ... + V_{n1} + V_{n2} + ... + V_{nm}$$

أو بصورة مختصرة

$$V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} V_{ij} \qquad (**)$$

من المعادلتين (*) و (**) نجد أن:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} V_{ij}$$

(4) وبأخذ النهاية عندما $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ نجد أن:

$$V = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta A$$

ملاحظة

عندما $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$، فإن قطر المستطيل يؤول إلى الصفر، وإذا عرفنا $\Delta s=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)}$، فإن $\Delta s\to 0$ عندما $(\Delta x,\Delta y)\to\bar{o}$ ويمكن كتابة المعادلة السابقة كما يلي:

$$V=\lim_{\Delta s\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i^*,y_j^*)\,\Delta A$$

حيث أن ΔA تساوي قطر المستطيل $\Delta x\Delta y$.

مثـال 1

أوجد الحجم تحت السطح $z=x+2y$ وفوق المستطيل:

$$\Omega=\{(x,y):1\le x\le 2,3\le y\le 5\}$$

الحـل

للسهولة نقسم الفترتين $[1,2]$ و$[3,5]$ إلى n من الفترات الجزئية المتساوية (أي أن $n=m$).

$$1=x_0<x_1<\ \dots\ x_n=2$$

و

$$3=y_0<y_1<\ \dots\ <y_n=5$$

كذلك $\Delta x=\frac{b-a}{b}=\frac{1}{n}$ و $\Delta y=\frac{d-c}{n}=\frac{2}{n}$

وهكذا $x_i=1+\frac{i}{n}$ و $y_j=3+\frac{2j}{n}$

وباختيار $x_i^*=x_i$ و $y_j^*=y_j$ نجد أن:

$$V_{ij}=f(x_i^*,y_j^*)\,\Delta A=(x_i+2y_j)\,\Delta x\Delta y$$

وبالتعويض عن x_i و y_j و Δx و Δy نجد أن:

$$V_{ij} = \left[\left(1+\frac{i}{n}\right)+2\left(3+\frac{2j}{n}\right)\right]\left(\frac{1}{n}\right)\ \left(\frac{2}{n}\right) = \left(7+\frac{i}{n}+\frac{4j}{n}\right)\ \ \frac{2}{n^2}$$

وهكذا:

$$V = \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{14}{n^2}+\frac{2i}{n^3}+\frac{8j}{n^3}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{14}{n^2}\right)+\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2i}{n^3}\right)+\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{8j}{n^3}\right)$$

ولحسن الحظ يمكن إيجاد مجموع المتسلسلات الثنائية السابقة حيث أن:

$$,\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\frac{14}{n^2} = \frac{14}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\ = \frac{14}{n^2}(n)(n) = 14$$

$$\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\frac{2i}{n^3} = \frac{2}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\ i = \frac{2}{n^3}(1+2+3+\ldots+n)(n)$$

$$.= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n+1}{n}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\frac{8j}{n^3} = \frac{8}{n^3}\ \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\ j = \frac{8}{n^3}(n)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{4(n+1)}{n}$$

ملاحظة

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

وهكذا

$$V = \sum_{i=1}^{n}\ \sum_{j=1}^{n}\ V_{ij} \approx 14+\frac{n+1}{n}+\frac{4(n+1)}{n}$$

وبذلك

$$V = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_j^*, x_j^*)\ \Delta A$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta A$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[14 + \frac{n+1}{n} + \frac{4(n+1)}{n} \right] = 19$$

والآن يمكننا تعريف التكامل الثنائي كما يلي:

تعريف 1 (التكامل الثنائي)

إذا كانت $z = f(x, y)$ والمنطقة Ω معرّفة كما يلي:

$$\Omega = \{(x, y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

وإذا كانت $\lim_{\Delta s \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta A$ موجودة ومستقلة عن كيفية اختيار النقاط (x_i^*, y_j^*)، فإن التكامل الثنائي للدالة f على Ω يعرّف كما يلي:

$$\int \int_\Omega f(x, y) dA = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta A$$

نظرية 1

إذا كانت الدالة f متصلة على المنطقة المستطيلة Ω، فإن الدالة f تكون قابلة للتكامل على Ω.

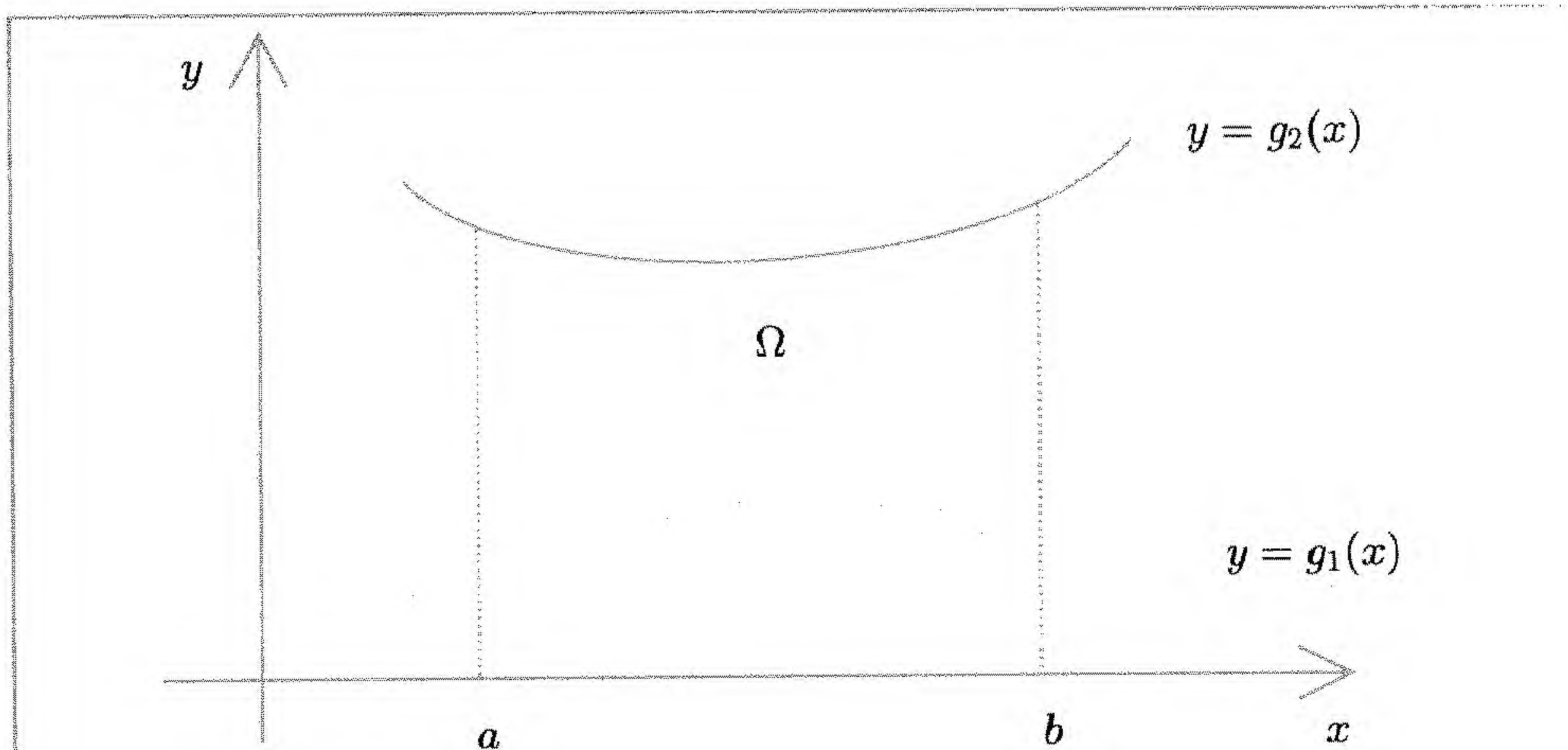
يمكن تعريف التكامل الثنائي على مناطق غير مستطيلة ومن أهمها المناطق الأفقية والرأسية البسيطة والتي سنقدمها فيما يلي:

المناطق الأفقية والرأسية البسيطة

حساب قيمة التكامل الثنائي باستخدام التعريف ليس بالأمر السهل، وتوجد كذلك بعض المناطق التي تكون عليها الدوال المتصلة غير قابلة للتكامل. وسنقتصر على نوعين من المناطق التي تكون عليها الدوال المتصلة قابلة للتكامل، ويمكن عليها حساب قيمة التكامل الثنائي.

تعريف 2

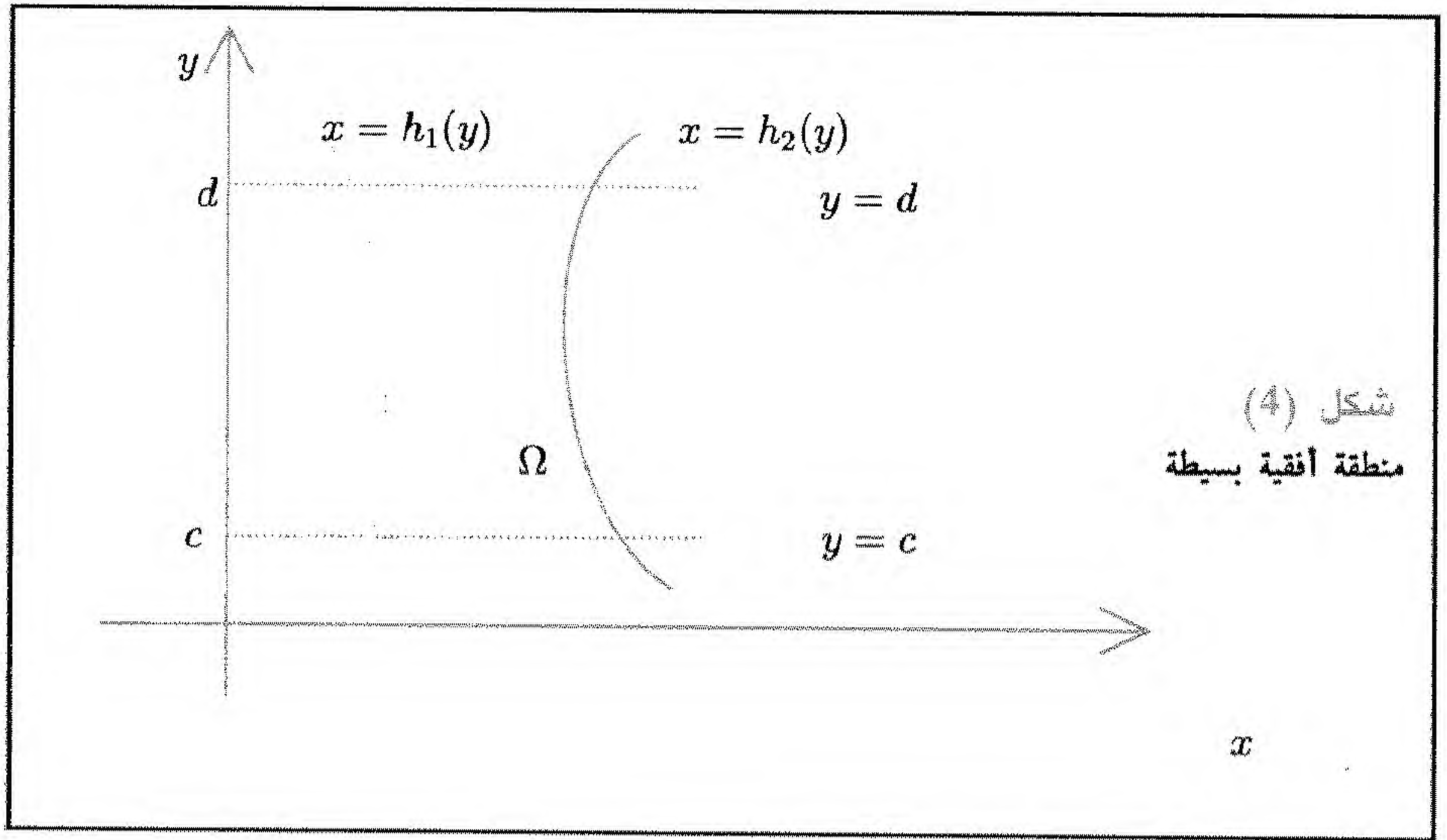
(1) إذا كانت الدالتان g_1 وg_2 متصلتين على الفترة $[a,b]$ حيث أن $g_1(x) \leq g_2(x)$ لكل $x \in [a,b]$، وإذا كانت Ω المنطقة الواقعة بين رسم الدالتين g_1 وg_2 على الفترة $[a,b]$، فإن المنطقة Ω تكون منطقة رأسية، انظر الشكل (3).



شكل (3)

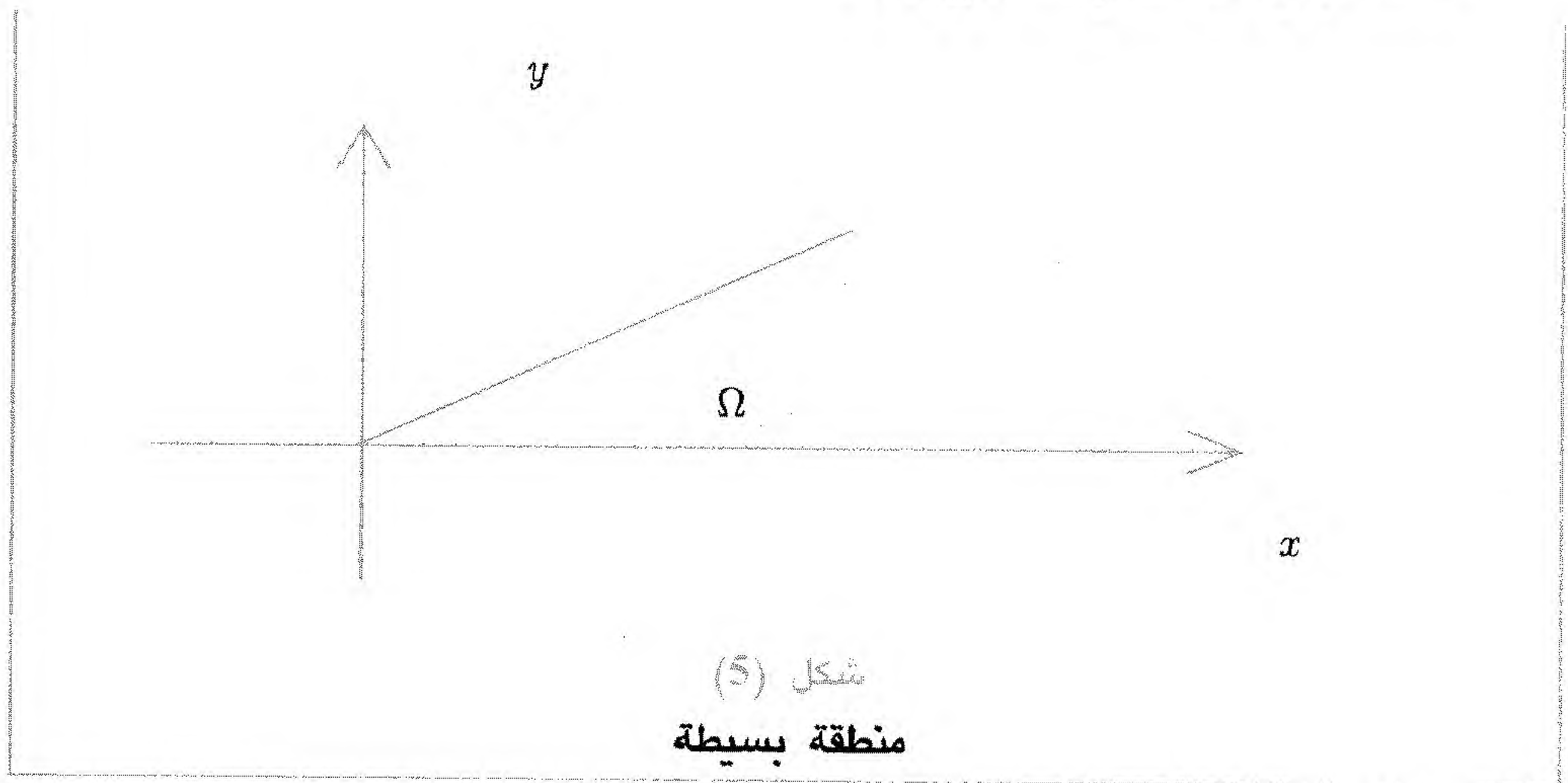
منطقة رأسية بسيطة

(2) إذا كانت الدالتان h_1 وh_2 متصلتين على الفترة $[c,d]$ حيث أن $h_1(y) \leq h_2(y)$ لكل $y \in [c,d]$. وإذا كانت Ω المنطقة الواقعة بين رسم الدالتين h_1 و h_2 على الفترة $[c,d]$، فإن المنطقة Ω تكون منطقة أفقية بسيطة، انظر الشكل (4).



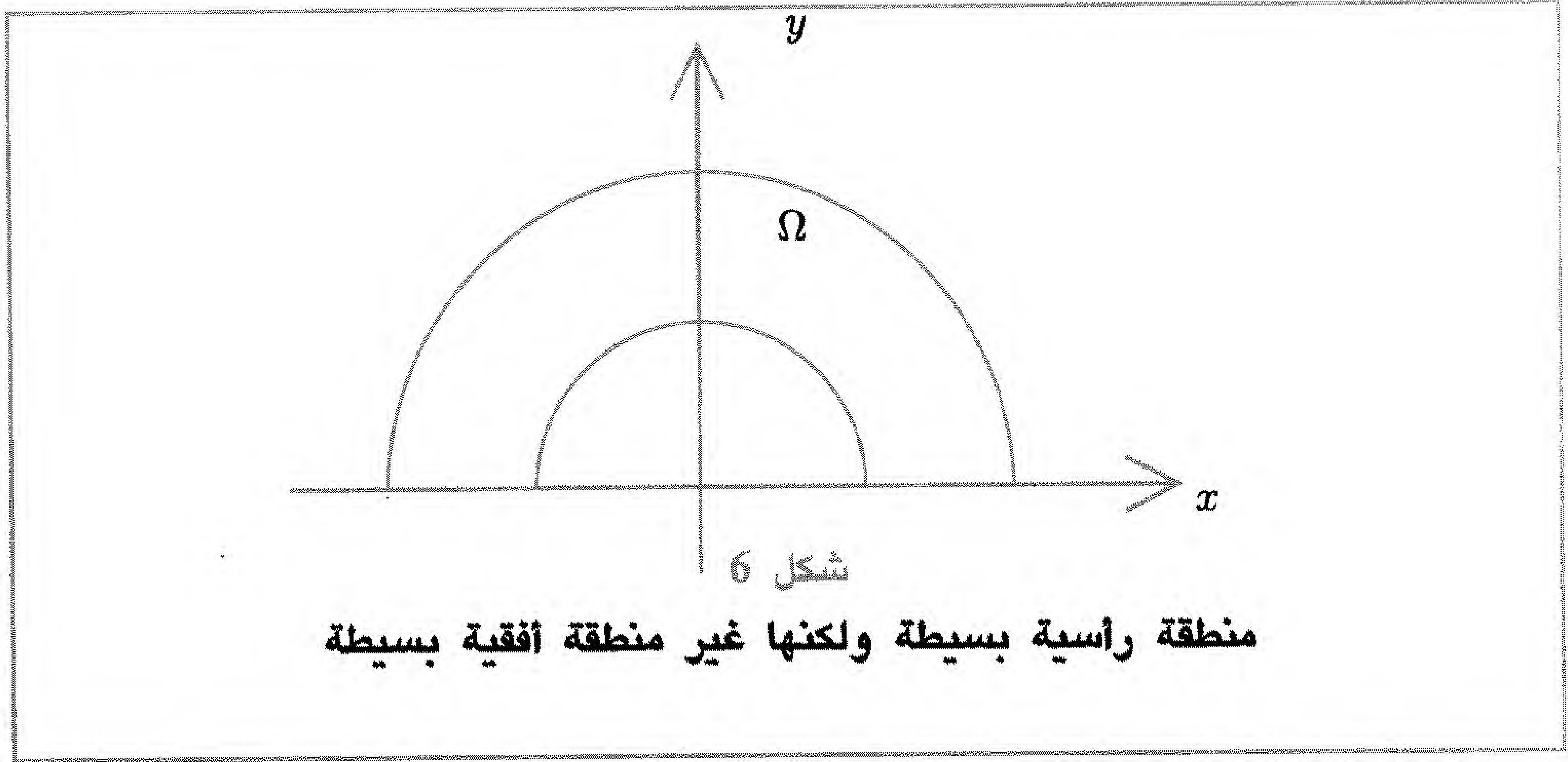
شكل (4)
منطقة أفقية بسيطة

(3) إذا كانت المنطقة Ω منطقة رأسية بسيطة، وأفقية بسيطة، فإن Ω تكون منطقة بسيطة، انظر الشكل (5).



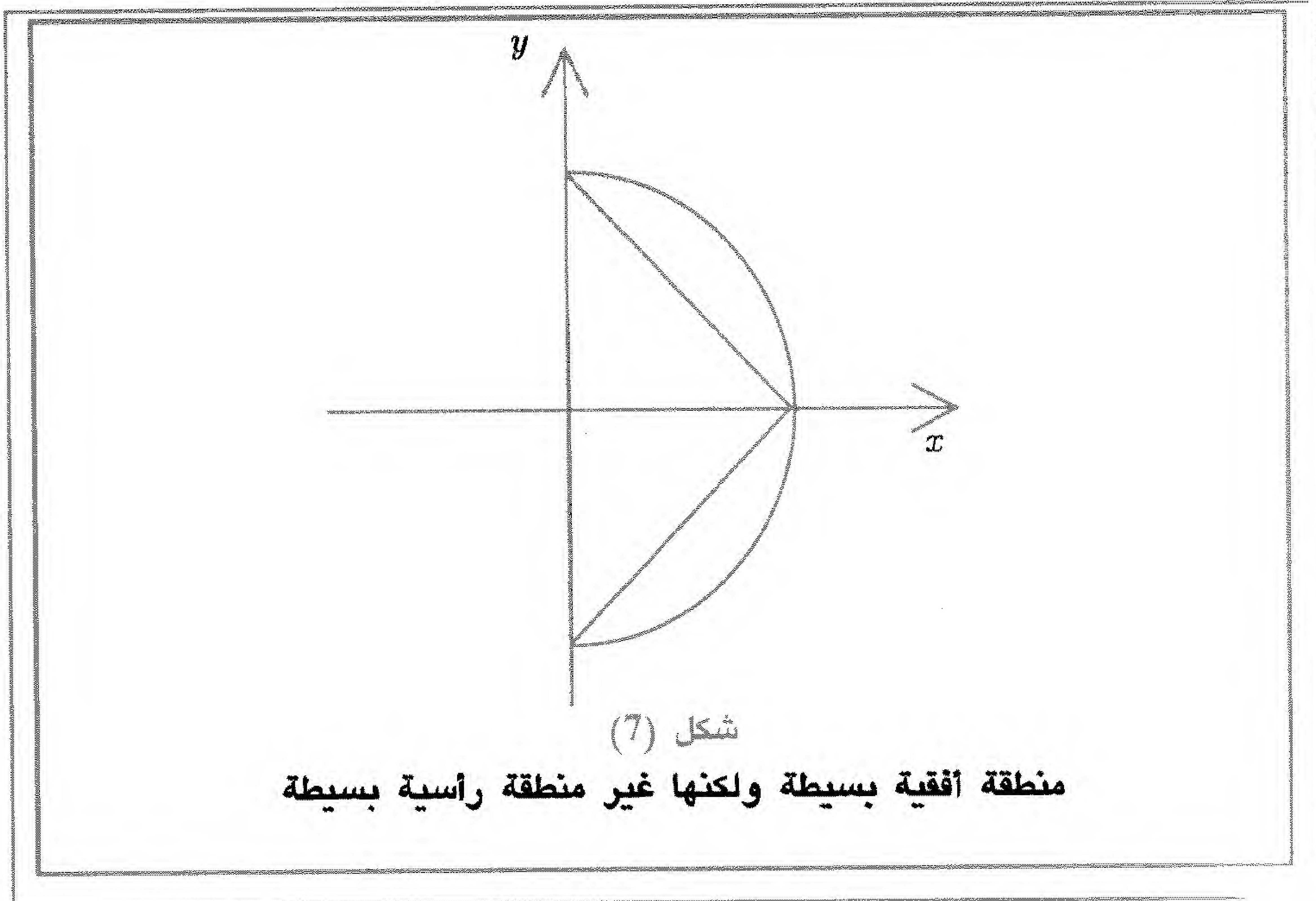
شكل (5)
منطقة بسيطة

وللتعرّف إلى مناطق مختلفة، انظر الأشكال من (6 ـ 8).



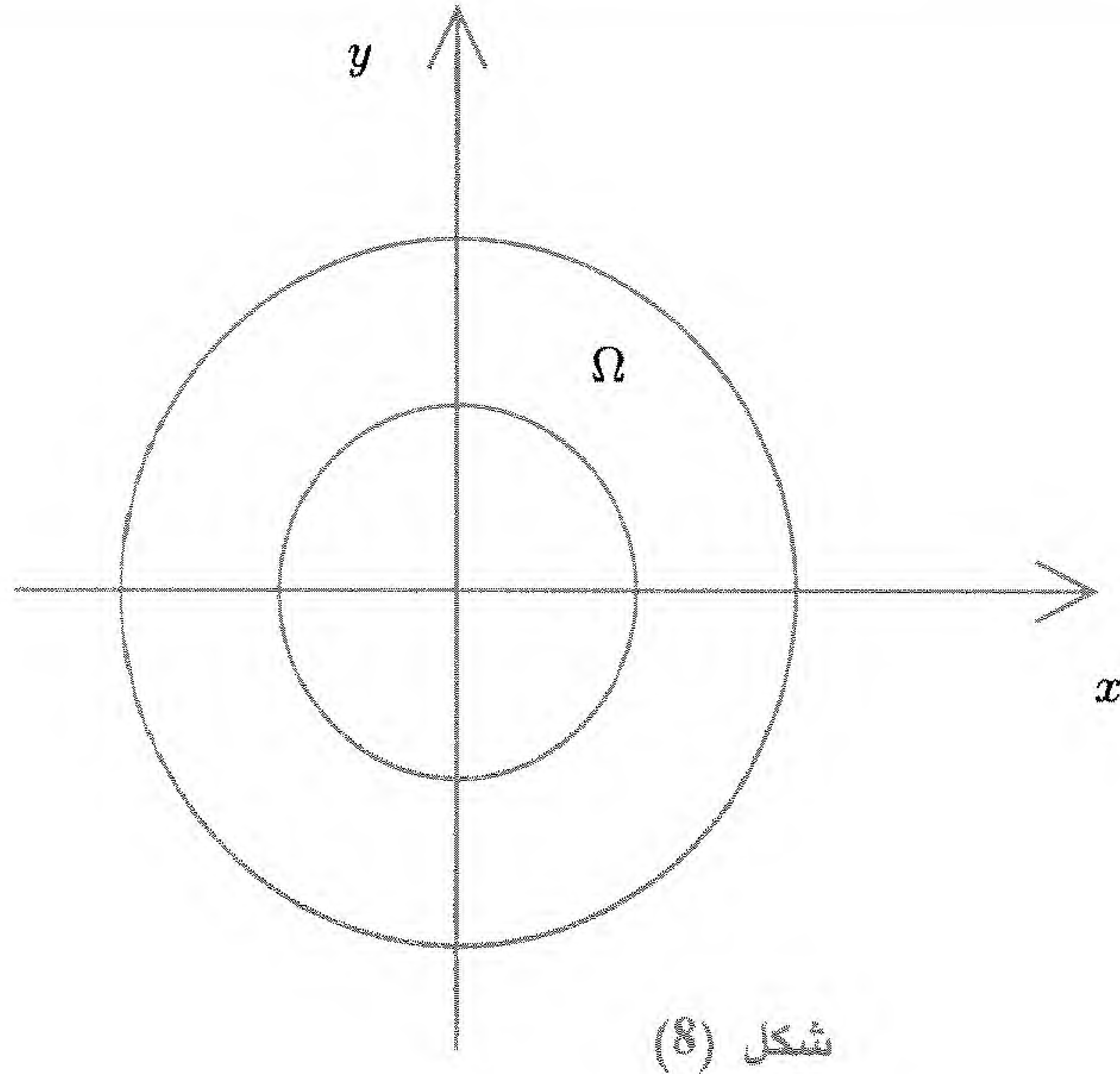
شكل 6

منطقة رأسية بسيطة ولكنها غير منطقة أفقية بسيطة



شكل (7)

منطقة أفقية بسيطة ولكنها غير منطقة رأسية بسيطة



شكل (8)

منطقة غير رأسية بسيطة وغير أفقية بسيطة

ويمكن تعريف التكامل الثنائي على منطقة عامة Ω، انظر الشكل (9)، ونفرض أن المنطقة محددة (Bounded)، أي أنه يوجد عدد M حيث أن لكل $(x,y)\in\Omega$ يكون $|f(x,y)|\leq M$، وبما أن Ω محددة، فإنه يمكن تعريف دالة جديدة $F(x,y)$ كما يلي:

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & ; \quad (x,y)\in\Omega \\ 0 & ; \quad (x,y)\neq R, (x,y)\notin\Omega \end{cases}$$

تعريف 3

إذا كانت f معرّفة على Ω، والدالة F معرّفة كما سبق، فإن:

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)dA=\int\int_{R} F(x,y)dA$$

وإذا كان التكامل على المنطقة R موجوداً، فإن الدالة f تكون قابلة للتكامل على Ω.

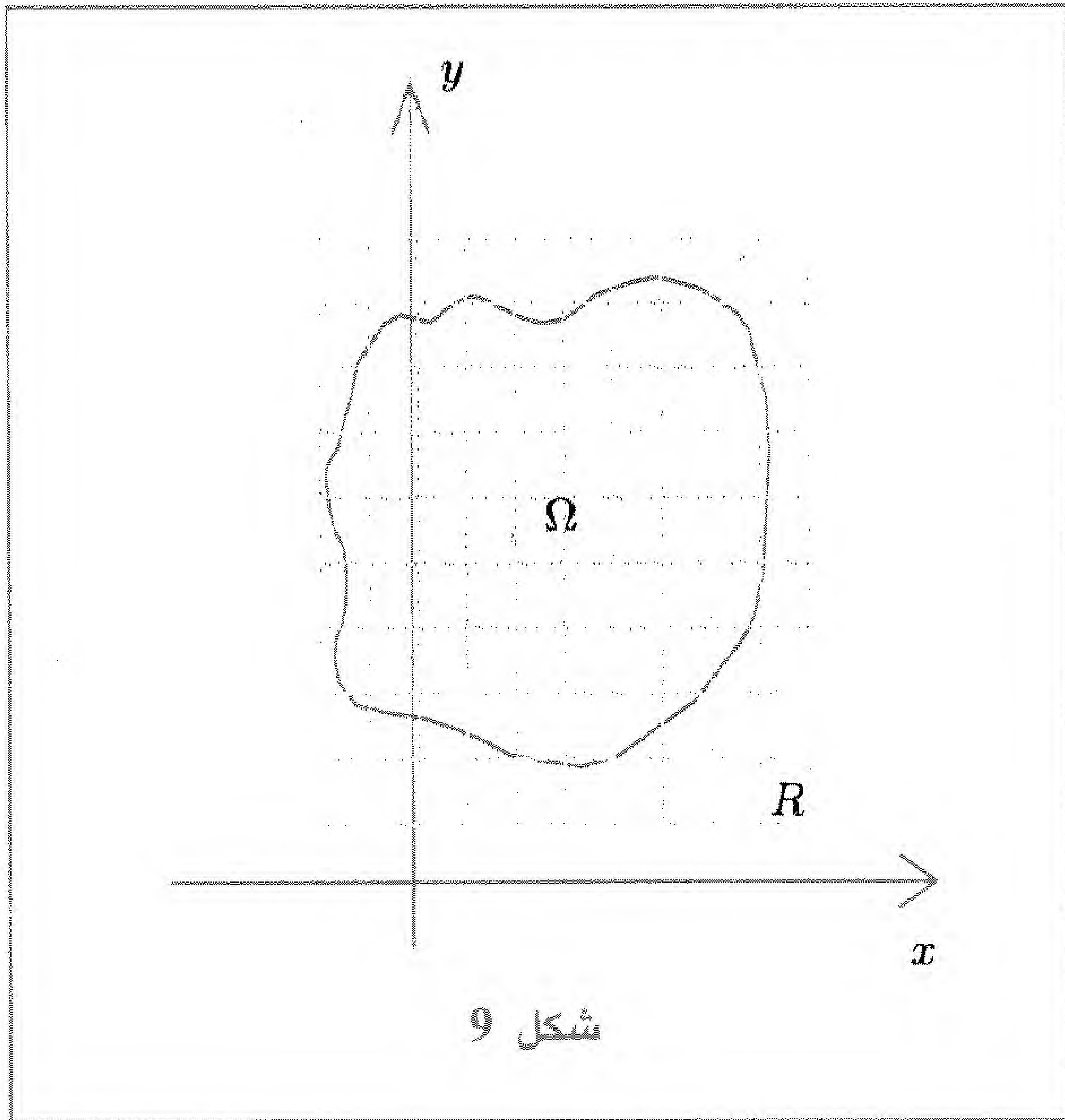
وسنوضح ذلك كما يلي:

إذا تم تقسيم المستطيل R إلى $n\,m$ من المستطيلات الفرعية، انظر الشكل (9). فإنه في كل مستطيل فرعي R_{ij} يقع بالكامل في Ω تكون $F = f$. وهكذا الحجم الذي يقع تحت السطح $Z = f(x, y)$ وفوق المستطيل R_{ij} يعطى بالمعادلة التالية:

$$V_{ij} \approx f(x_i^*, y_j^*)\ \Delta x \Delta y$$
$$= F(x_i^*, y_j^*)\ \Delta x \Delta y$$

وإذا كان R_{ij} في R وليس في Ω، فإن $F = 0$، وهذا يعني أن

$$V_{ij} = F(x_i^*, y_j^*)\ \Delta x \Delta y = 0$$



شكل 9

وأخيراً إذا كان R_{ij} لا يوجد بالكامل داخل Ω أي أن جزءاً منه يقع خارج Ω، فإن هذا لا يعتبر مشكلة حقيقية، لأنه عندما $\Delta s \to 0$ يؤول مجموع الحجوم فوق هذه المستطيلات (على حدود Ω إلى الصفر إذا كانت حدود Ω معقدة جداً، وهكذا يكون مجموع الحجوم فوق R يساوي مجموع الحجوم فوق Ω وهذا يفسر التعريف 3.

2.2 خواص التكامل الثنائي

الخواص الأساسية للتكامل الثنائي مشابهة تماماً لخواص التكامل للدالة في متغير واحد. وفيما يلي سنذكر أهم الخواص الأساسية للتكامل الثنائي:

إذا كانت الدالتان g, f قابلتين للتكامل في المنطقة المغلقة R، فإن:

1) $$\iint_R Cf(x,y)dA = C\iint_R f(x,y)dA$$

حيث أن C مقدار ثابت.

2) $$\iint_R [f(x,y) \pm g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA \pm \iint_R g(x,y)dA$$

3) إذا كان لكل (x,y) في R يكون $m \leq f(x,y) \leq M$ وإذا كان $A\ (R)$ ترمز إلى مساحة R، فإن:

$$mA(R) \leq \iint_R f(x,y)dA \leq MA(R)$$

4) إذا كانت $f(x,y) \leq g(x,y)$، فإن:

$$\iint_R f(x,y)dA \leq \iint_R g(x,y)dA$$

5) إذا كانت R مكونة من عدة مناطق $(R_1, R_2, ...)$ وf متصلة في R، فإن:

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA + ...$$

نظرية 2

إذا كانت $f(x,y)$ متصلة في المنطقة المغلقة R حيث أن:

$$f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \quad ; \quad a \leq x \leq b$$

$f_1(x)$ و $f_2(x)$ متصلتان، فإن:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\,dx$$

وبصورة مشابهة تماماً إذا كانت R على الصورة

$$g_1(y) \le y \le g_2(y) \quad ; \quad c \le y \le d$$

$g_1(y)$ و $g_2(y)$ متصلتان، فإن:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\,dy$$

مثال 1

أوجد أصغر قيمة وأكبر قيمة للتكامل الثنائي: $\iint_R f(x,y)dA$

حيث أن: $R = \{(x,y) : a \le x \le b \; ; \; c \le y \le d\}$ و $f(x,y) = sin(x-3y)$

الحل

بما أن $-1 \le sin(x-3y) \le 1$ ومساحة المنطقة R تكون $A(R) = (b-a)\,(d-c)$ إذن حسب الخاصية (3) نجد أن:

$$-(b-a)(d-c) \le \iint_R sin(x-3y)dA \le (b-a)(d-c)$$

3.2 طرق إيجاد التكامل الثنائي (التكامل الجزئي)

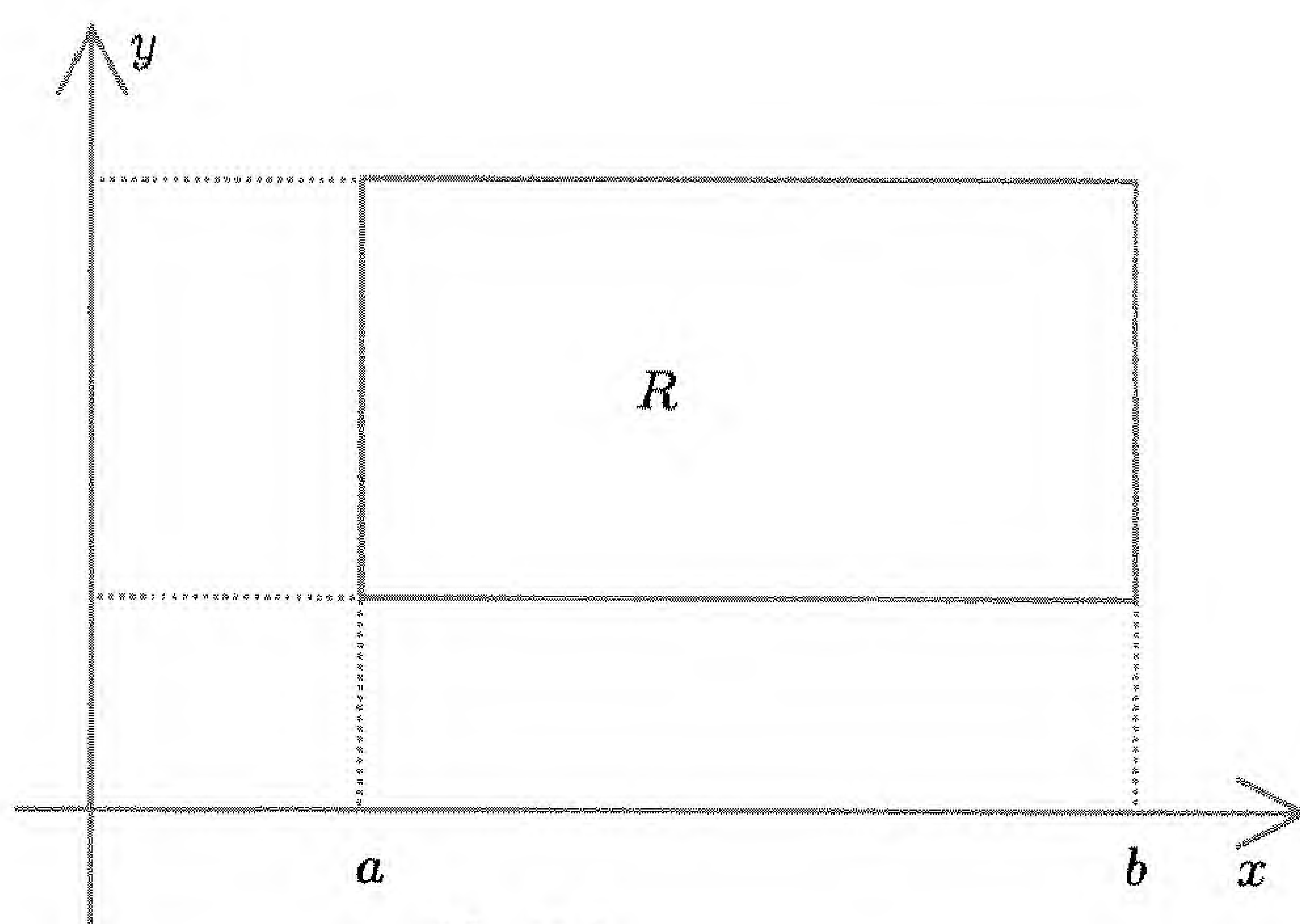
إذا كانت المنطقة R على شكل مستطيل في المستوى xy حيث أن $c \le y \le d, a \le x \le b$ وإذا كانت الدالة $f(x,y)$ متصلة في R، فإن التكامل المعتاد بالنسبة للمتغير x هو

$$\int_a^b f(x,y)dx$$

ويكون الناتج دالة في y فقط ولذلك $A(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ معرّفة في الفترة $c \le y \le d$.

وتكامل الدالة $A(y)$ يمكن أن يحسب كما يأتي:

$$\int_c^d A(y)dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx \right] dy$$



شكل 10

ويمكن البداية من الناحية الأخرى

$$B(x) = \int_c^d f(x,y)dx$$

وهكذا

$$\int_a^b B(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx$$

تعريف 4

التكامل

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy \quad \text{أو} \quad \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

يسمى التكامل الجزئي أو التكامل المتكرر للدالة f .

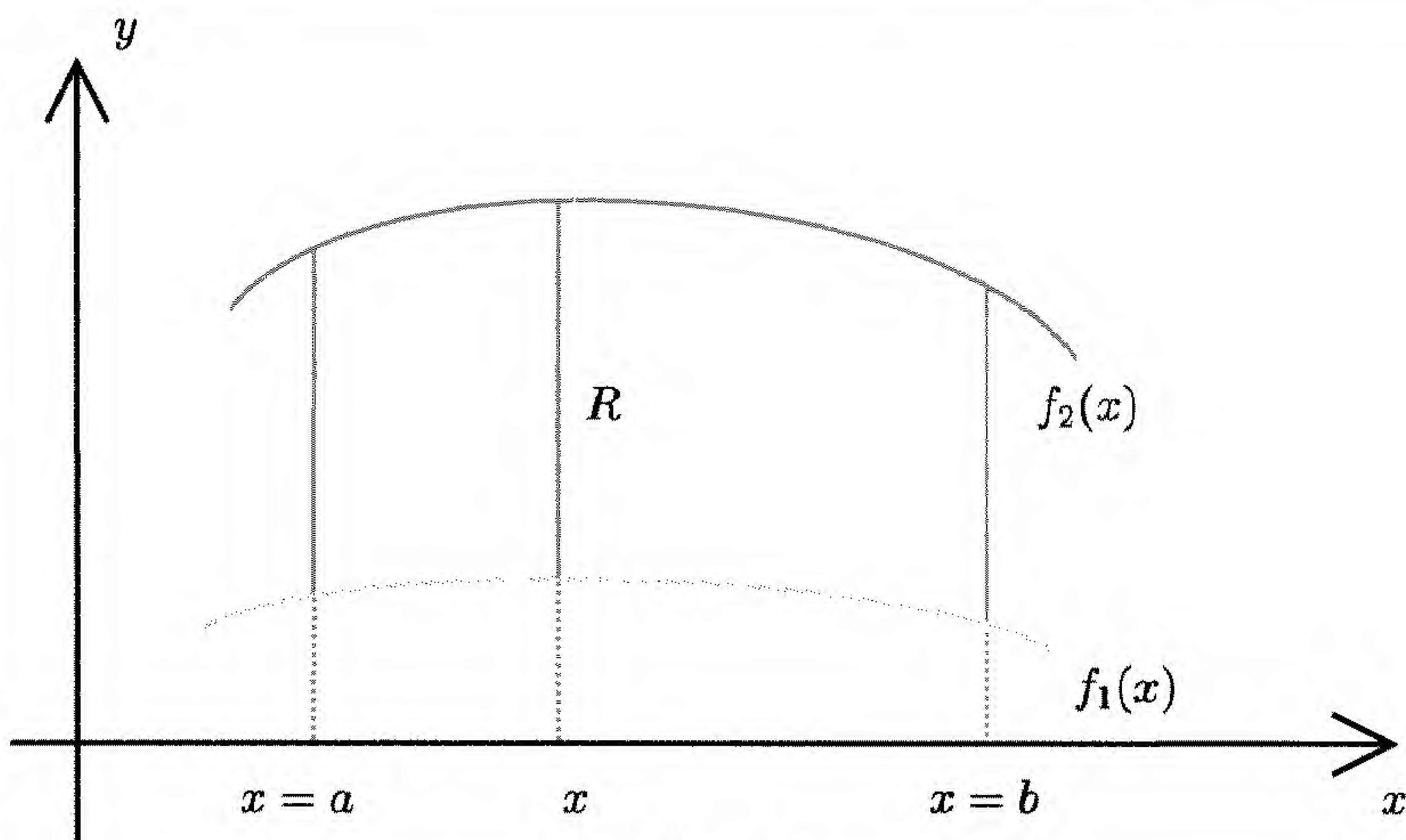
ملاحظة

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\ dy$$

أو

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\ dx$$

والتكامل الثنائي (الجزئي) يمكن أن يعرف في المنطقة R التي حدودها منحنيان كما هو موضح في الشكل (11).



شكل 11

$$R = \{(x,y)/a \leq x \leq b\ ;\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

وبذلك يمكن تعريف التكامل الثنائي في R كما يلي:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\ dx$$

حيث حدود y تكون من أسفل $\big(y = f_1(x)\big)$ إلى أعلى $\big(y = f_2(x)\big)$ وحدود x من اليسار $(x = a)$ إلى اليمين $(x = b)$.

وبصورة عامة يمكن تعريف التكامل الثنائي في المنطقة R كما هو موضح في الشكل (12).

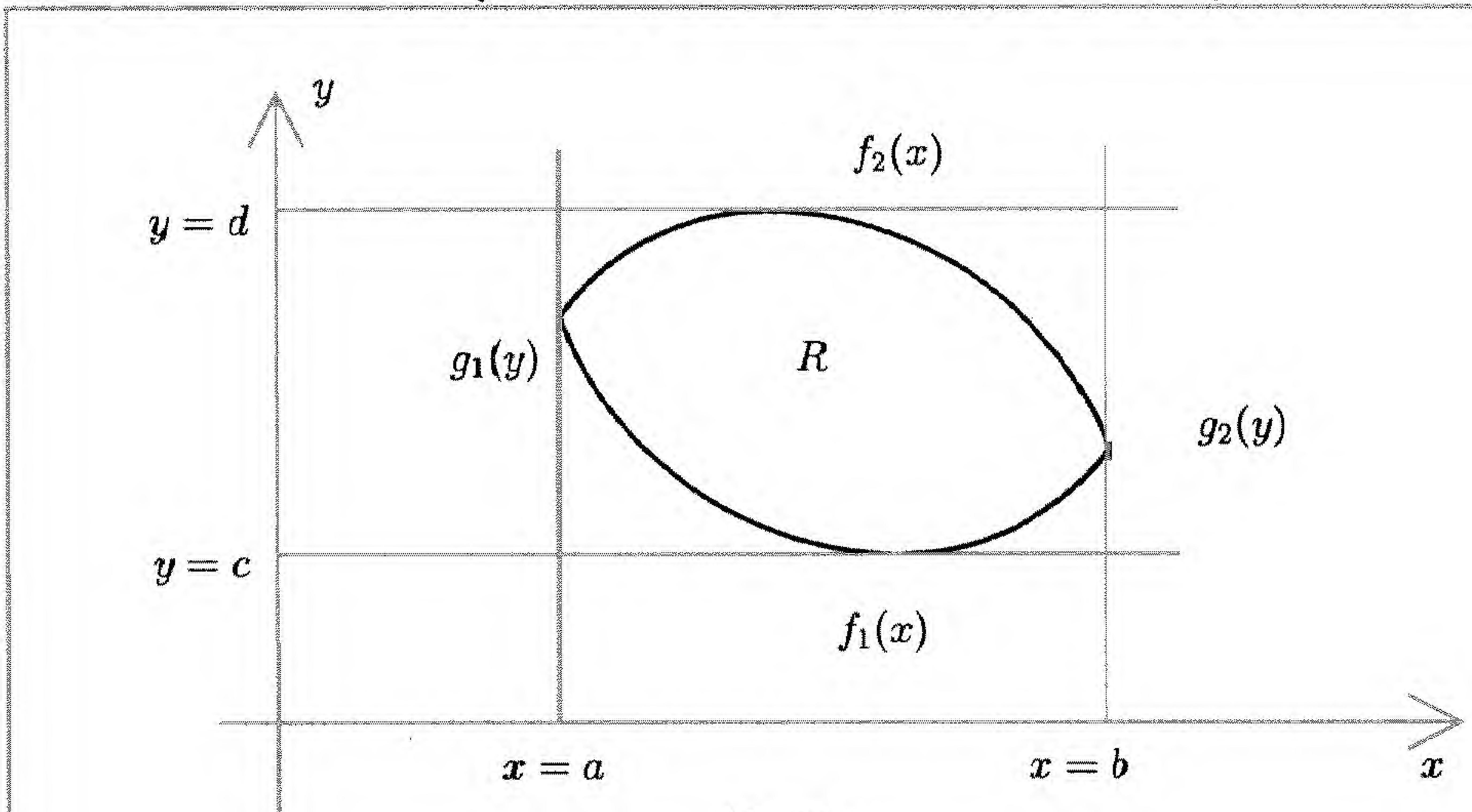
$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\ dx$$

حيث أن: $R = \Big\{(x,y)/a \leq x \leq b\ ;\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\Big\}$

و

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\ dy$$

حيث أن: $R = \Big\{(x,y)/c \leq y \leq d\ ;\ g_1(y) \leq y \leq g_2(x)\Big\}$



شكل 12

ملاحظة

$$\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\,dx = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\,dy$$

مثـــال 1

أوجد الحجم تحت السطح $z = y + 2y$ وفوق المستطيل R حيث أن:

$$R = \left\{(x,y) : 1 \le x \le 2; 3 \le y \le 5\right\}$$

الحــل

$$V = \iint_R (x+2y)dA = \int_1^2 \int_3^5 (x+2y)dy\,dx = \int_1^2 (xy+y^2)\Big|_3^5 dx$$

$$= \int_1^2 (2x+16)dx = (x^2+16x)\Big|_1^2 = 19$$

وكذلك يمكن حساب الحجم كما يلي:

$$V = \iint_R (x+2y)dA = \int_3^5 \int_1^2 (x+2y)dx\,dy$$

$$= \int_2^5 \left(\frac{x^2}{2} + 2yx\right)\Big|_1^2 dy$$

$$= \int_3^5 \left(2y + \frac{3}{2}\right)dy$$

$$= \left(y^2 + \frac{3}{2}y\right)\Big|_3^5 = 19$$

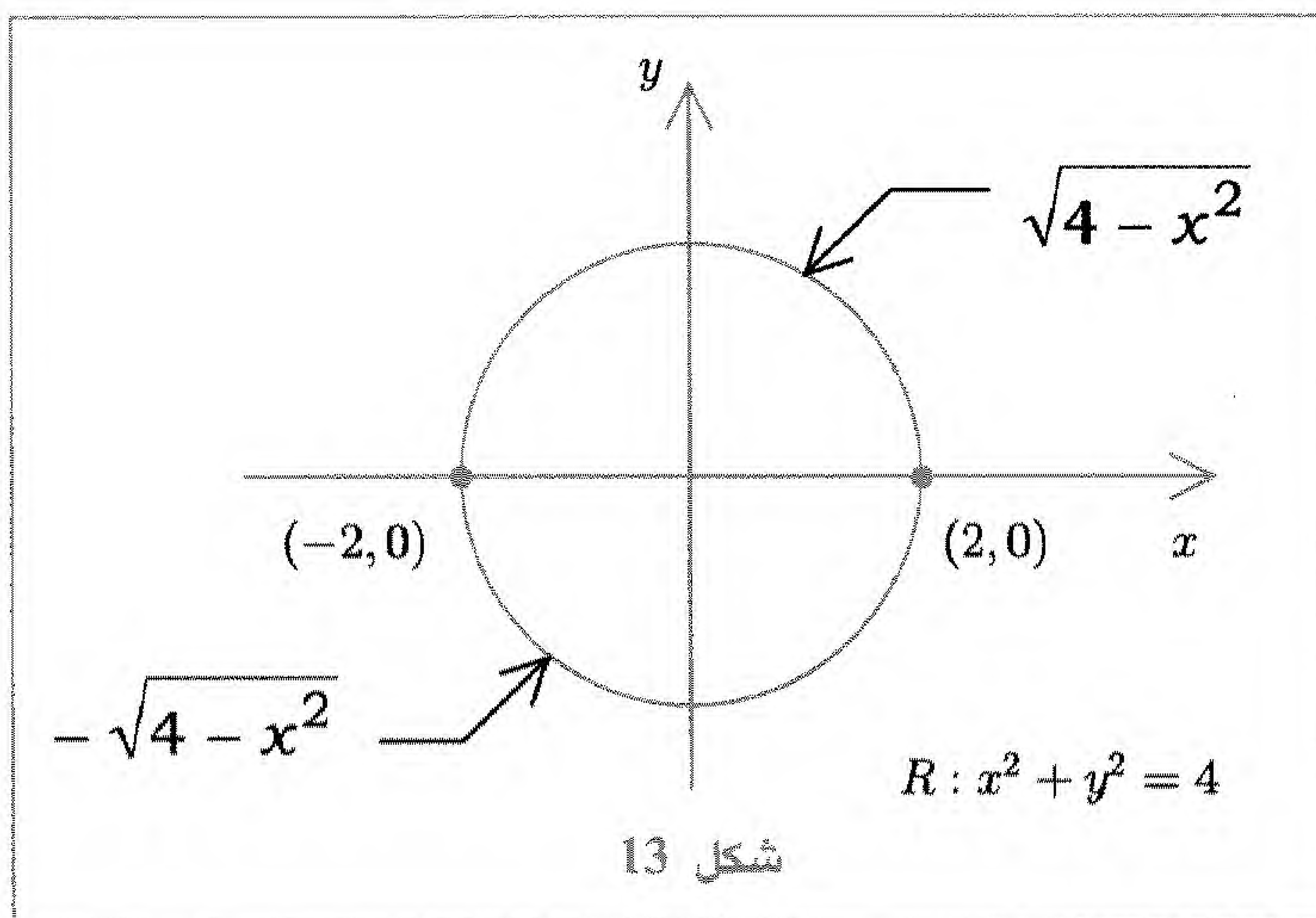
ملاحظة: يمكنك الآن المقارنة مع طريقة الحل المتبعة في البند الأول.

مثـــال 2

أوجد قيمة التكامل الثنائي

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy\,dx$$

وارسم المنطقة R.



شكل 13

الحــل

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy\,dx = \int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{2}\,y^2\Big|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}\Big(4-x^2-(4-x^2)\Big)dx$$

$$= 0$$

حيث أن R دائرة نصف قطرها 2 ومركزها نقطة الأصل.

مثـــال 3

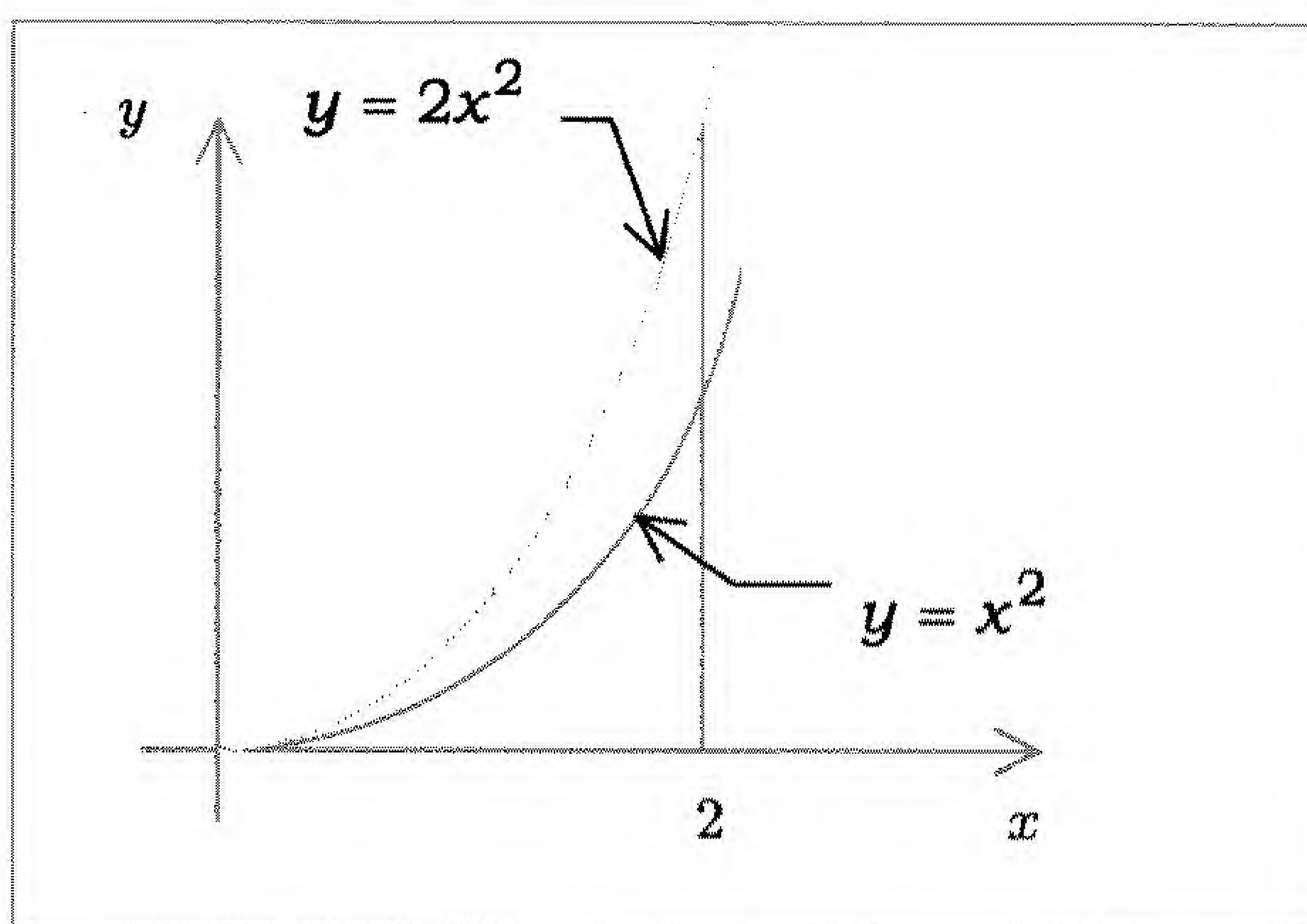
أوجد $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{x^2}^{2x^2} x\cos y\,dy\,dx$

وارسم المنطقة R.

الحــل

$$R = \{(x,y)/x^2 \leq y \leq 2x^2 \ ; \ 0 \leq x \leq 2$$

كما هو موضح بالرسم:



شكل 14

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x^2} x \cos y \, dy \, dx = \int_0^2 x \sin y \Big|_{x^2}^{2x^2} dx \quad ; \quad (x \text{ ثابت})$$

وبالتعويض عن y نجد أن:

$$= \int_0^2 \left(x \sin(2x^2) - x \sin x^2\right) dx$$

$$= \left(-\frac{1}{4} \cos(2x^2) + \frac{1}{2} \cos x^2\right)\Big|_0^2$$

وهكذا

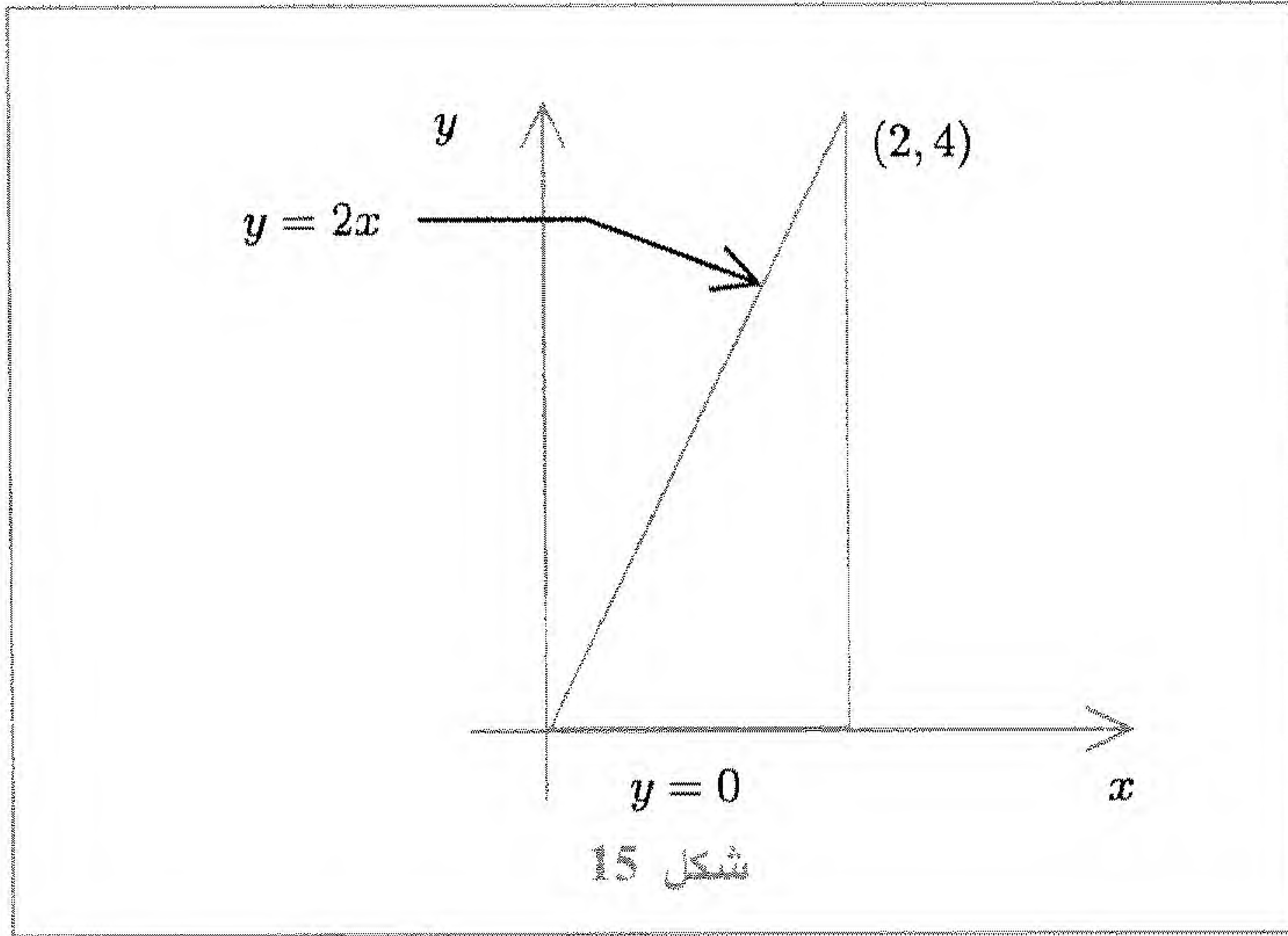
$$= -\frac{1}{4}[\cos(8) - 2\cos(4) + 1]$$

مثـــال 4

أوجد $\iint_R x\,y\,dA$ حيث R المنطقة المغلقة الواقعة بين $y=0$ ، $y=2x$ ، $x=2$

الحــل

يفضل دائماً رسم المنطقة R قبل وضع حدود التكامل.



شكل 15

واضح من الشكل أنه يمكن إجراء عملية التكامل حسب الترتيب $dydx$ أو $dxdy$.

أولاً إذا اخترنا الترتيب dydx:

$$\iint_R x\;y\;dA=\int_0^2\int_0^{2x} x\;y\;dy\;dx$$

$$=\int_0^2 \frac{x}{2}y^2\Big|_0^{2x}dx=\int_0^2\frac{x}{2}(4x^2)dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^4\right)\Big|_0^2=8$$

وإذا اخترنا الترتيب dx dy:

$$\iint_R x\ y\ dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^2 x\ y\ dx\ dy = \int_0^4 \left(2y - \frac{1}{8}y^3\right) dy = 8$$

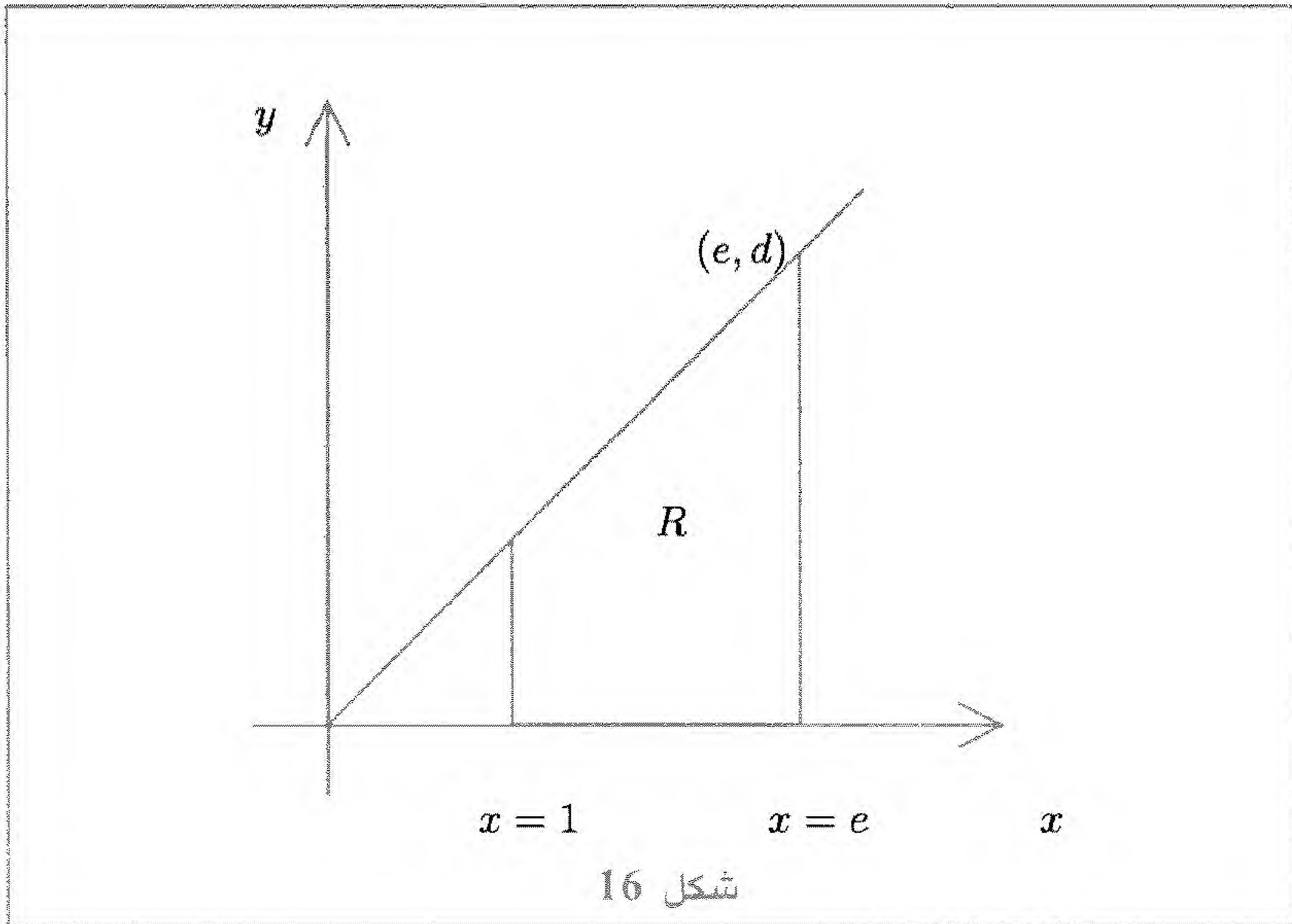
لاحظ تساوي القيمتين.

مثـــال 5

أوجد $\int_1^e \int_0^x ln\ x\ dy\ dx$

الحــل

$$\int_1^e [y\ ln\ x]_0^x dx = \int_1^e x\ ln\ x\ dx$$



شكل 16

ويمكن إيجاد التكامل الأخير كما يأتي:

$$\int_1^2 x\ ln\ x\ dx = \frac{1}{2}\int_1^e ln\ x\ dx^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 ln\ x\Big|_1^e - \int_1^e x^2 d\ ln\ x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^2 - \int_1^e x\ dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{2}x^2\Big|_1^e\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^2 - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(e^2 + 1)$$

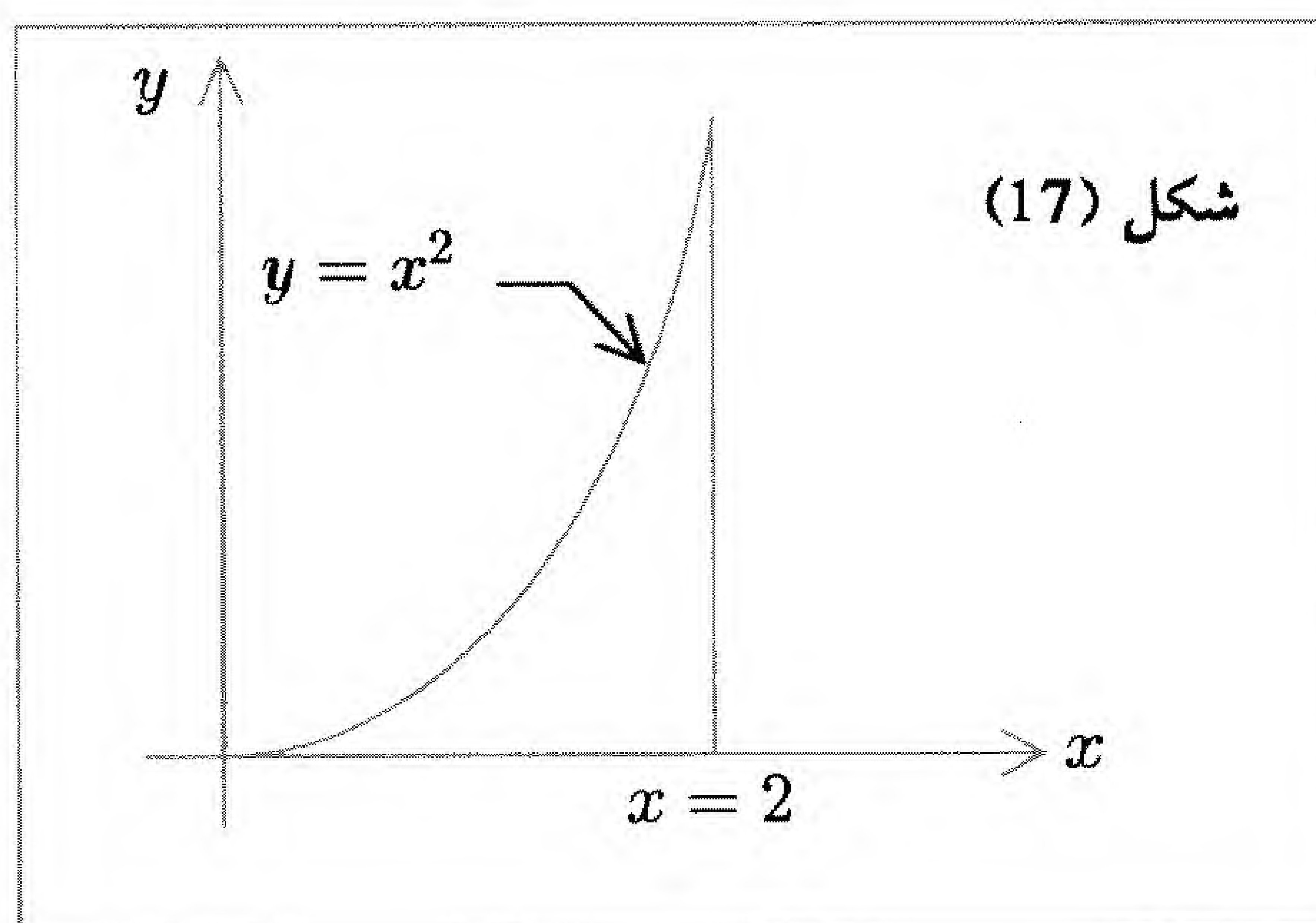
مثـال 6

أوجد قيمة التكامل الثنائي:

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 y \; cosx^5 \; dx \; dy$$

الحـل

لا يمكن إيجاد قيمة التكامل على هذه الصورة ولذلك سنحاول تغيير حدود التكامل، ويفضل دائماً رسم المنطقة R. أنظر الشكل (17).



شكل (17)

من الشكل يتضح أن:

$$\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^2 y\ cosx^5\ dx\ dy=\int_0^2\int_0^{x^2} y\ cosx^5\ dy\ dx$$

واضح أنه يمكن إيجاد التكامل في الجانب الأيمن، أي أن:

$$\int_0^2\int_0^{x^2} y\ cosx^5\ dy\ dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^4\ cosx^5\ dx$$

$$=\frac{1}{10}sinx^5\Big|_0^2$$

$$=\frac{sin\ 32}{10}$$

تمارين

أوجد التكاملات الآتية وارسم المنطقة R في المستوى $x\ y$ في كل حالة:

1) $\int_2^3\int_{\sqrt{x}}^{x^2}(x^2-2xy-3y^2)dy\ dx$

2) $\int_0^1\int_{x^3}^{x^2}(x^2-xy)dy\ dx$

3) $\int_0^2\int_{x^2}^{2x^2} x\ cos\ y\ dy\ dx$

4) $\int_1^2\int_1^x\frac{x^2}{y^2}dy\ dx$

5) $\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x^2y\ dy\ dx$

6) $\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1\sqrt{1+y^3}dy\ dx$

7) $\int_0^9\int_{\sqrt{y}}^3 sinx^3\ dx\ dy$

8) $\int_0^1\int_x^1\frac{1}{y}siny\ cos\frac{x}{y}dy\ dx$

$$\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{(y^2)} dy\, dx$$ (9

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \frac{y}{\sqrt{16+x^8}} dx\, dy$$ (10

عبّر عن كل تكامل ثنائي كتكامل جزئي ثم أوجد قيمة التكامل:

(11 $\iint_R x\, y^2\, dA$ حيث أن R مثلث رؤوسه $(0,0)$, $(3,1)$, $(-2,1)$.

(12 $\iint_R e^{\frac{x}{y}}\, dA$ حيث أن R المنطقة المحددة بـ $y=4$, $y=-x$, $y=2$.

(13 $\iint_R x^3 \cos xy\, dA$ حيث أن R المنطقة المحددة بـ $x=2$ ، $y=0$ ، $y=x^2$.

(14 بيّن أن:

أ) $$\iint_R dA = \frac{1}{2}$$

حيث أن R المنطقة الواقعة بين رسمي المعادلتين:

$$x = y \quad \text{و} \quad x = y^{\frac{1}{3}}$$

ب) $$\int_{-\infty}^{\infty} Exp(-x^2-y^2)dx\, dy = \pi$$

جـ) $$\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \cos\left(\frac{x^2}{3}-x\right)dx\, dy = 2\sin\left(\frac{2}{3}\right)$$

4.2 الحجم والمساحة والكتلة والعزم

التكامل الثنائي له تطبيقات متعددة وسنذكر منها ما يلي:

1) الحجم (Volume)

إذا كانت $z = f(x, y)$ تمثل معادلة السطح، فإن:

$$V = \iint_R f(x, y)dA$$

تعطي حجم المجسم الواقع بين السطح والمستوى $x\,y$

2) المساحة (Area)

إذا كانت $f(x, y) \equiv 1$، فإن

$$A(R) = \iint_R dA$$

حيث أن $A(R)$ تمثل مساحة المنطقة المغلقة R.

3) الكتلة (Mass)

إذا كانت $f(x, y)$ تمثل الكثافة $\left(\dfrac{\Delta m}{\Delta V}\right)$، فإن:

$$M(R) = \iint_R f(x, y)dA$$

حيث أن $M(R)$ كتلة الصفيحة التي على شكل المنطقة R.

4) مركز الكتلة (Center of Mass)

إذا كانت الدالة تمثل الكثافة، فإن مركز الكتلة (x, y) للصفيحة الممثلة بالمنطقة R يعطى بالمعادلتين:

$$M_x = \iint_R y\ f(x, y)dA \quad , \quad M_y = \iint_R x\ f(x, y)dA$$

5) عزم القصور الذاتي (Moment of Inertia)

عزم القصور الذاتي للصفيحة حول محور x ومحور y

$$I_y = \iint_R x^2 f(x,y)dA \quad , \quad I_x = \iint_R y^2 f(x,y)dA$$

وكذلك عزم القصور الذاتي القطبي حول نقطة الأصل:

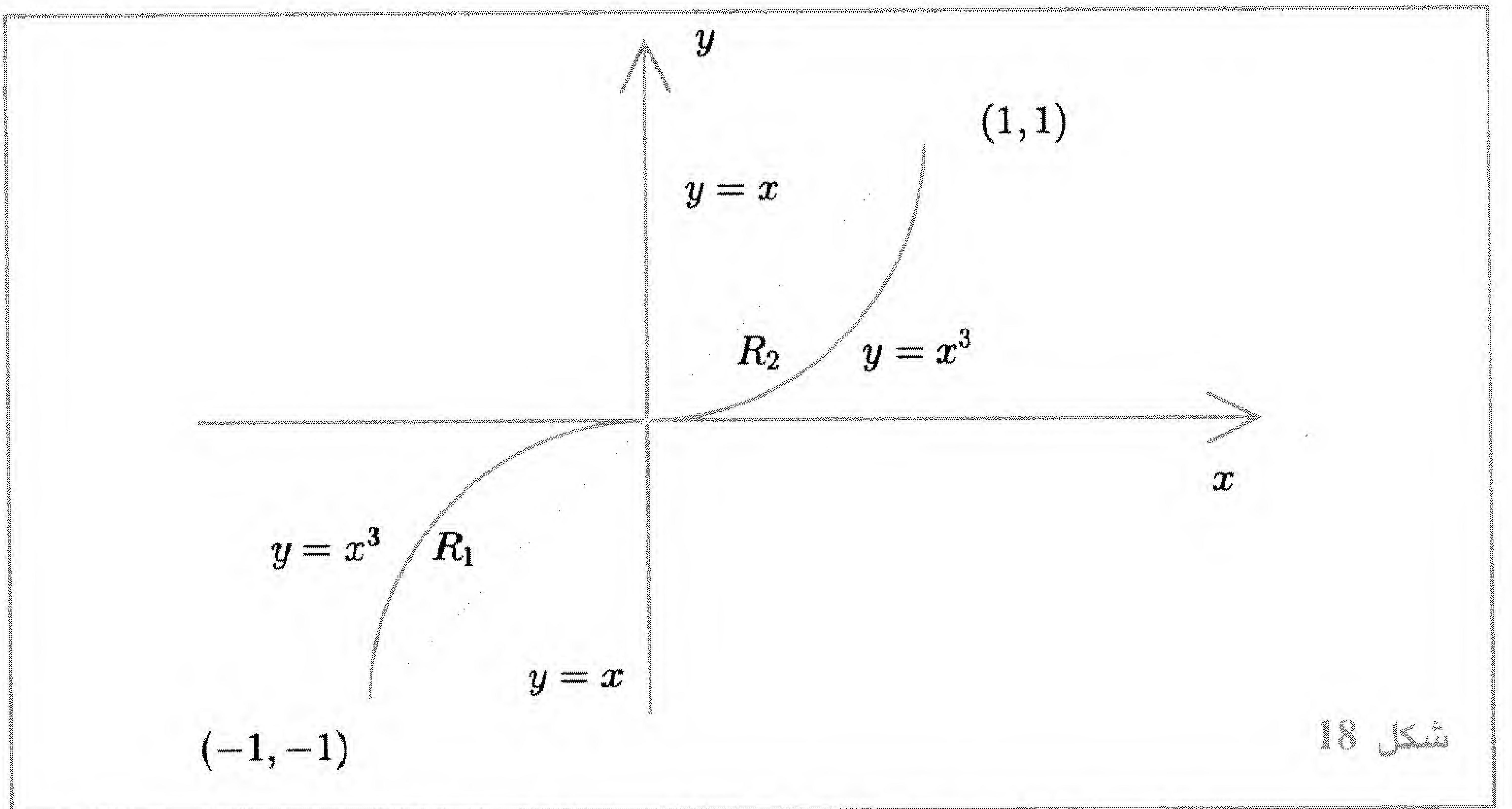
$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2+y^2) f(x,y)dA$$

مثال 1

أوجد المساحة الواقعة بين المنحنى $y=x^3$ والمستقيم $y=x$.

الحل

المعادلتان تتقاطعان عند النقاط التالية $(0,0)$، $(1,1)$، $(-1,-1)$ كما هو موضح بالشكل (18).



شكل 18

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2)$$

ولذلك $$A(R)\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{x}^{x^3} dy\ dx+\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{x^3}^{x} dy\ dx=\frac{1}{2}$$

وتترك تفاصيل إجراء عملية التكامل للقارئ.

مثـــال 2

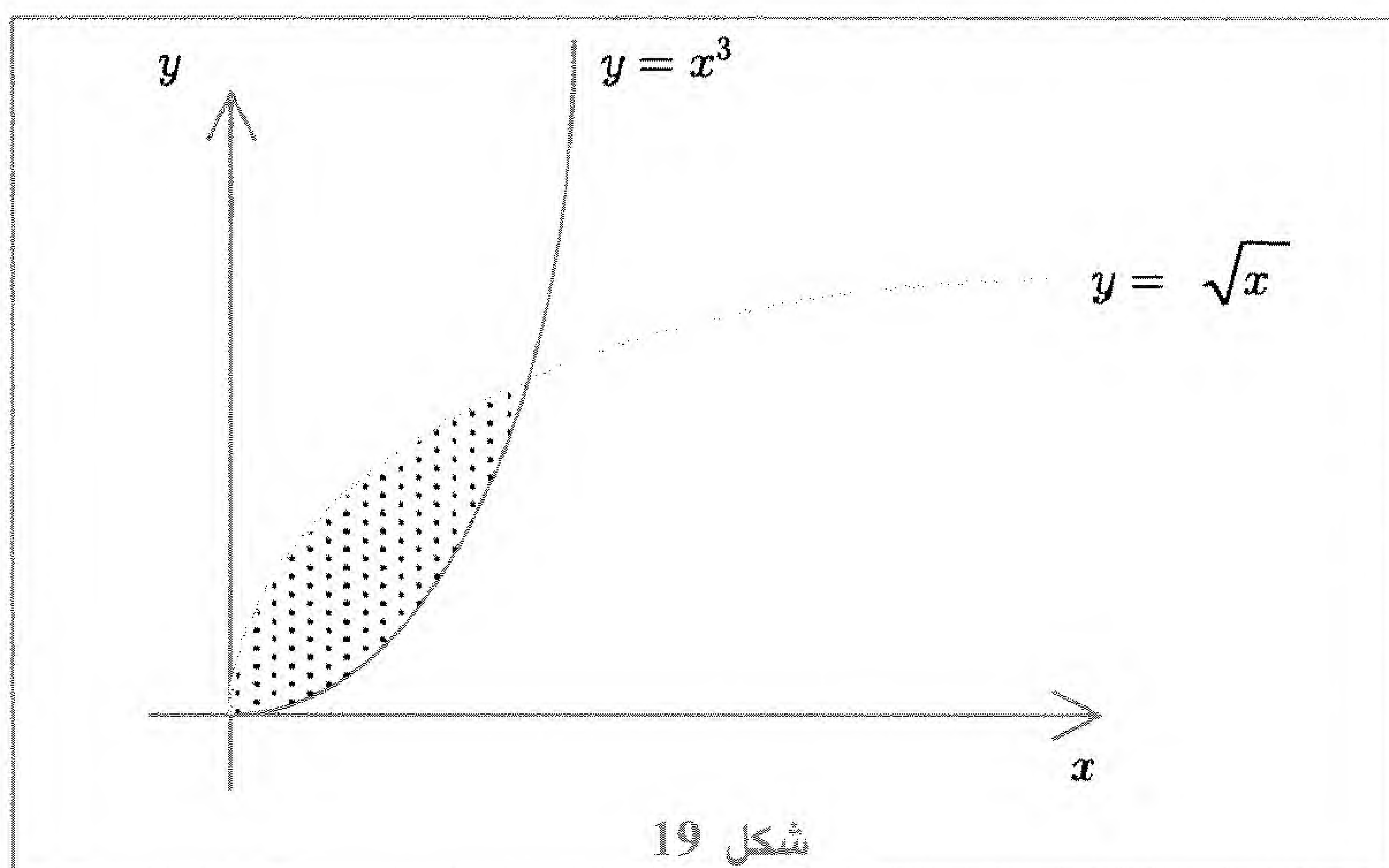
أوجد المساحة المحصورة بين المعادلتين $y=x^3$ و $y=\sqrt{x}$

الحـــل

المنحنيان يتقاطعان عند النقطتين $(1,1),(0,0)$.

المساحة:

$$\begin{aligned}A(R)&=\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{x^3}^{\sqrt{2}} dy\ dx\\&=\int\limits_{0}^{1}\left(\sqrt{x}-x^3\right)dx\\&=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{5}{12}\end{aligned}$$



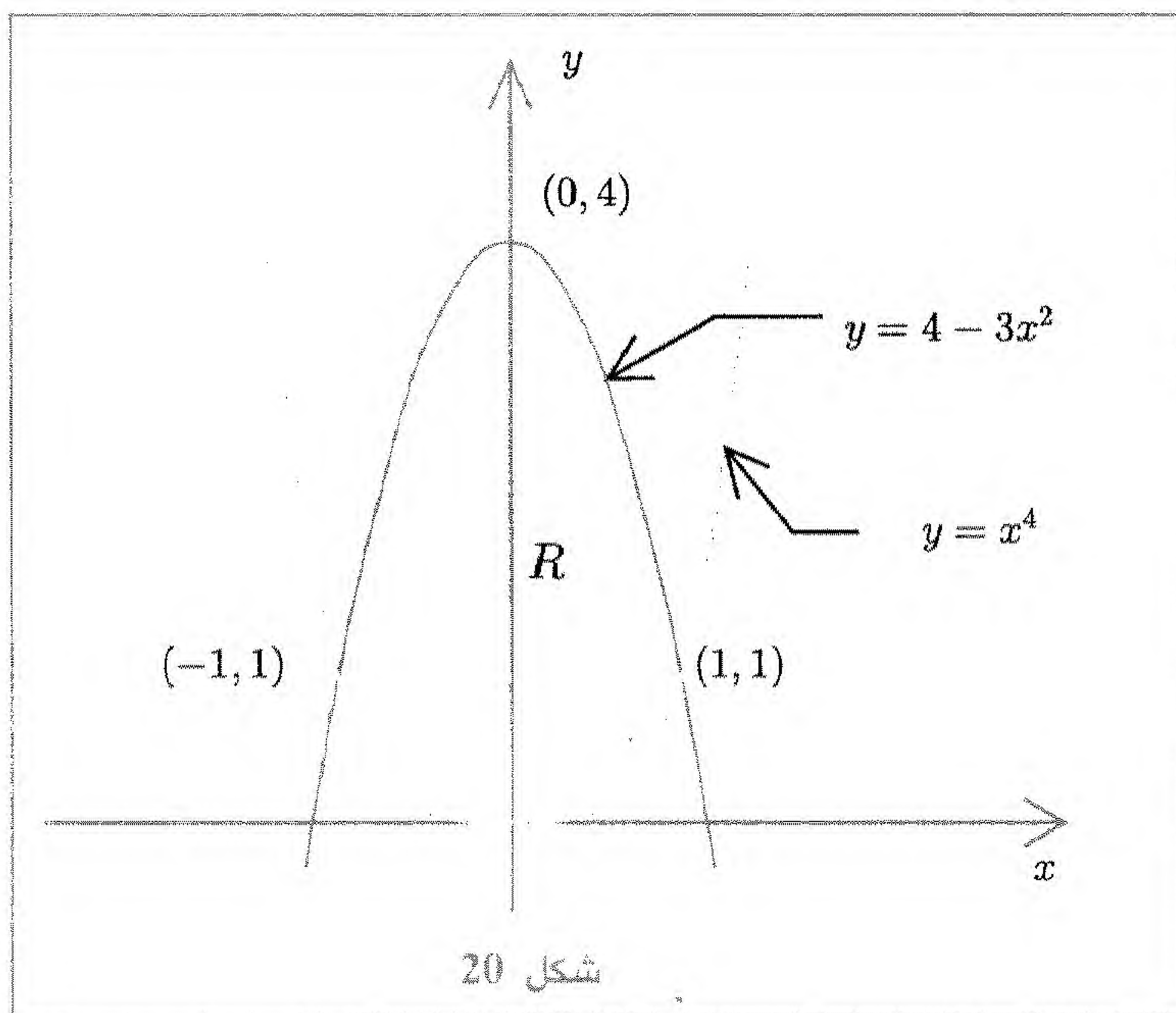
شكل 19

مثـــال 3

أوجد مساحة المنطقة R الواقعة بين المنحنيين $y = x^4$ و $y = 4 - 3x^2$

الحـــل

يتقاطع المنحنيان عند النقطتين $(1,1)$, $(-1,1)$.



شكل 20

مساحة المنطقة R

$$A(R) = \int_{-1}^{1} \int_{x^4}^{4-3x^2} dy\ dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (4 - 3x^2 - x^4) dx$$

$$= \left(4x - x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \left[\left(4 - 1 - \frac{1}{5}\right) - \left(-4 + 1 + \frac{1}{5}\right)\right] = 6 - \frac{2}{3} = \frac{28}{5}$$

مثـــال 4

أوجد حجم المجسم المحدد بالسطوح التالية:

$$x = 2\ ,\ z = 0\ ,\ y = 0\ ,\ x^2 = y + z$$

الحـــل

$$V = \int_0^2 \int_0^{x^2} (x^2 - y)dy\, dx = \int_0^2 (x^2 y - \frac{1}{2} y^2)\Big|_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^4}{2}\, dx = \frac{16}{5}$$

ملاحظة: سنتناول إيجاد حجوم المجسمات بالتفصيل في الفصل الثالث عند دراسة التكامل الثلاثي.

مثـــال 5

صفيحة معدنية لها شكل المنطقة R في المستوى $x\,y$ محددة برسم المعادلتين $x = y^2$ و $x = 4$. أوجد مركز الكتلة إذا كانت الكثافة عند $P(x,y)$ تتناسب طرداً مع المسافة من محور y إلى النقطة P.

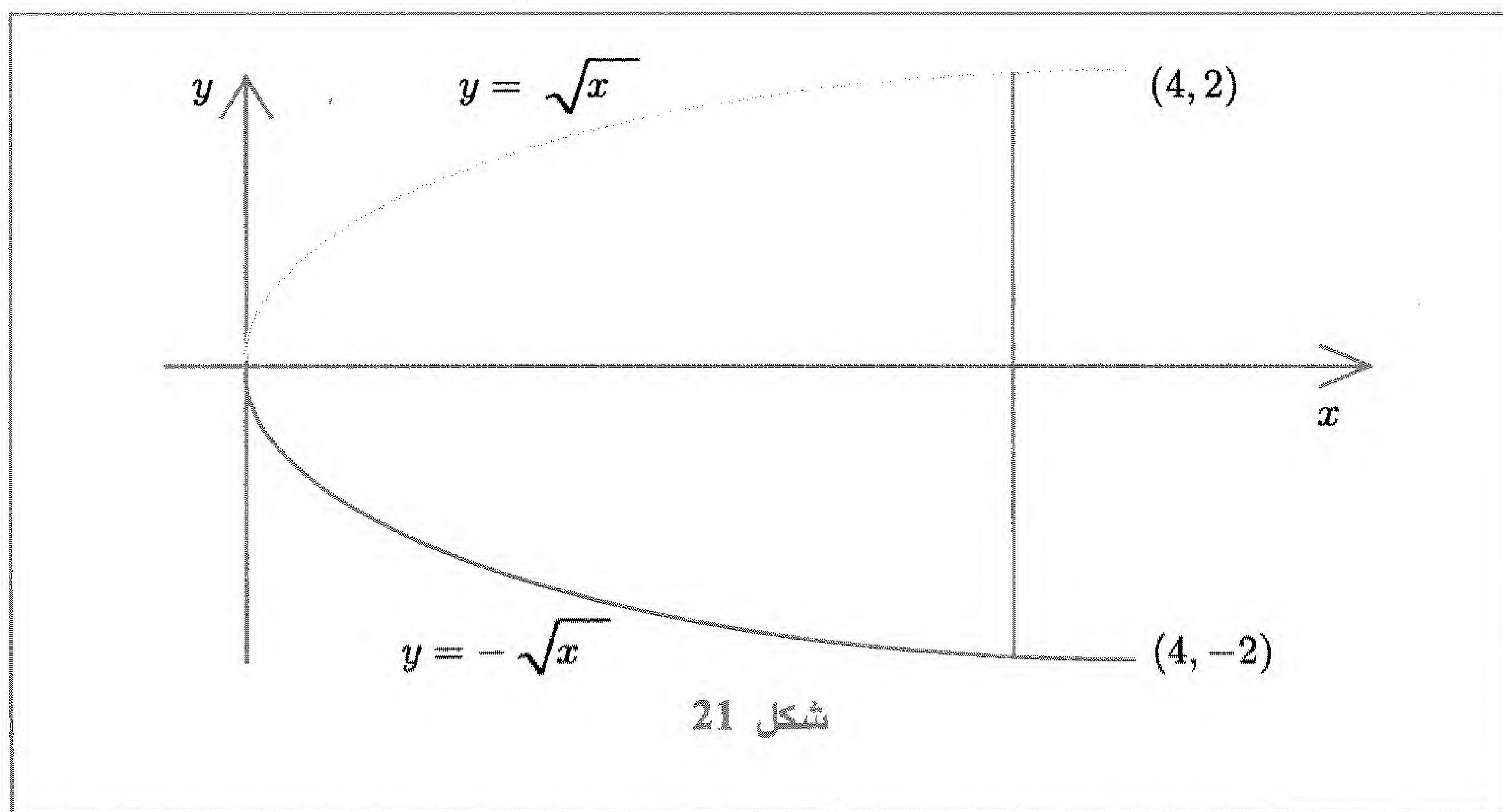
الحـــل

من المعطيات $P(x,y) = k\,x$ حيث أن k مقدار ثابت، وحسب التعريف السابق كتلة الصفيحة:

$$M = \iint_R k\,x\,dA$$

$$= k\int_0^4 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x \; dy \; dx$$

$$= 2k\int_0^4 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4k}{5} x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4 = \frac{128}{5}k$$



شكل 21

عزم الصفيحة بالنسبة للمحور y:

$$M_y = \int_0^4 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x(kx) \; dy \; dx$$

$$= 2k\int_0^4 x^{\frac{5}{2}} dx$$

$$= \frac{4k}{7}(128) = \frac{512k}{7}$$

ومركز الكتلة

$$x = \frac{M_y}{M} = \frac{512k}{7} \cdot \frac{5}{128k} = \frac{20}{7}$$

يترك تمرين للقارئ أن يبين $y = 0$، وهكذا

$$(x, y) = \left(\frac{20}{7}, 0\right)$$

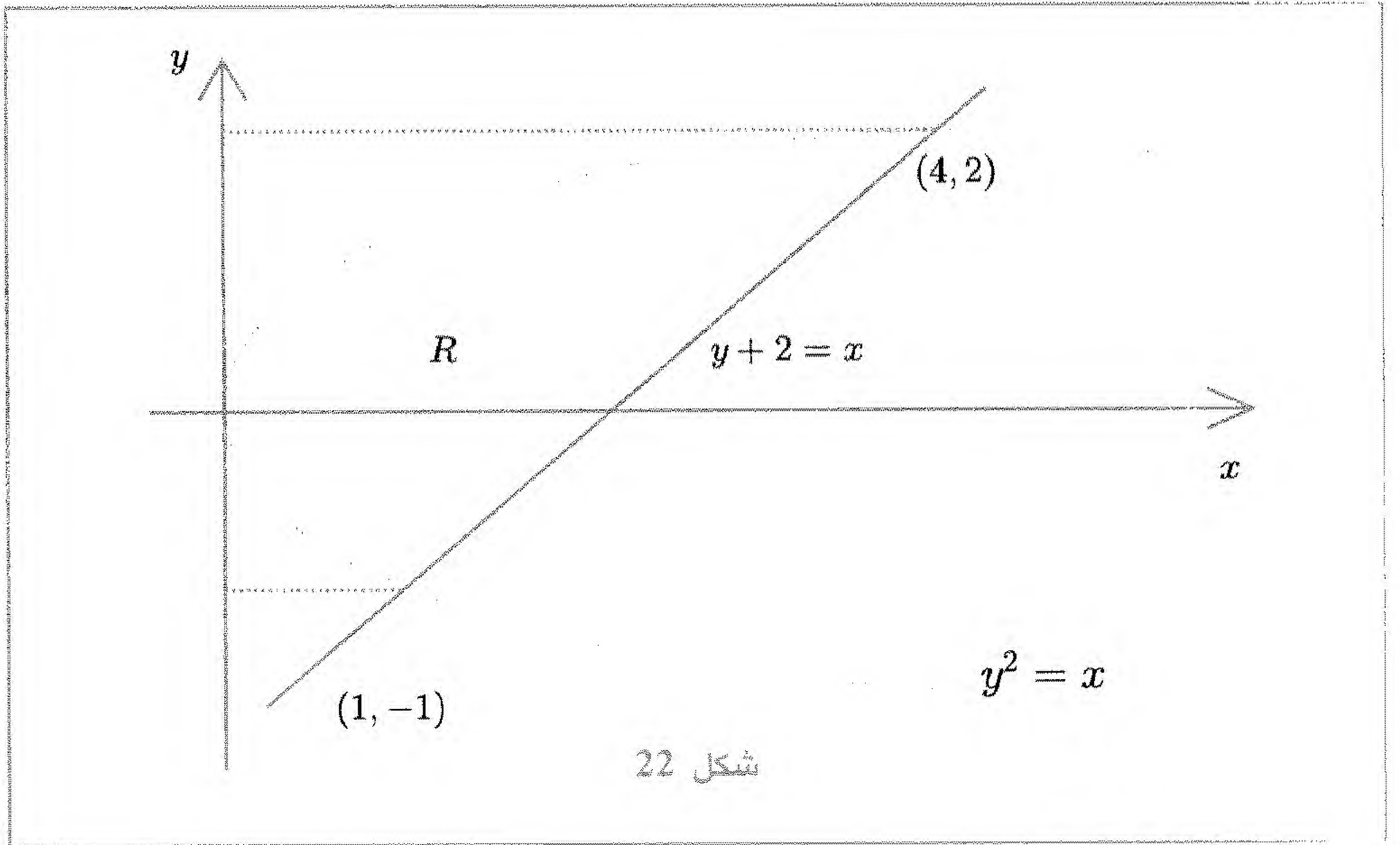
مثــال 6

أوجد كتلة المنطقة R المحددة بـ $y^2 = x$ و $x = y + 2$ حيث أن الكثافة تعطى بالمعادلة التالية: $P = x^2\ y^2$

الحــل

من السهل أن نوضح أن المنحنيين يتقاطعان عند النقطتين $(1,-1)$, $(2,4)$.

الكتلة: $$M(R) = \iint\limits_R P(x,y)\ dA$$



شكل 22

واضح من الشكل أن:

$$M(R) = \int_1^2 \int_{y^2}^{y+2} x^2\ y^2\ dx\ dy$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-1}^{2} y^2\ x^3 \Big|_{y^2}^{y+2} dx$$

وبالتعويض عن y وتجميع الحدود المتشابهة:

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{6} y^6 - \frac{1}{9} y^9 + \frac{6}{5} y^5 + 3y^4 + \frac{8}{3} y^3\right] \Bigg|_{-1}^{2} = 20.7$$

مثــال 7

صفيحة معدنية مستوية على شكل مثلث محددة بالمستقيمين $y = x$ و $y = 2 - x$، ومحور x، كثافتها تعطى بالمعادلة التالية:

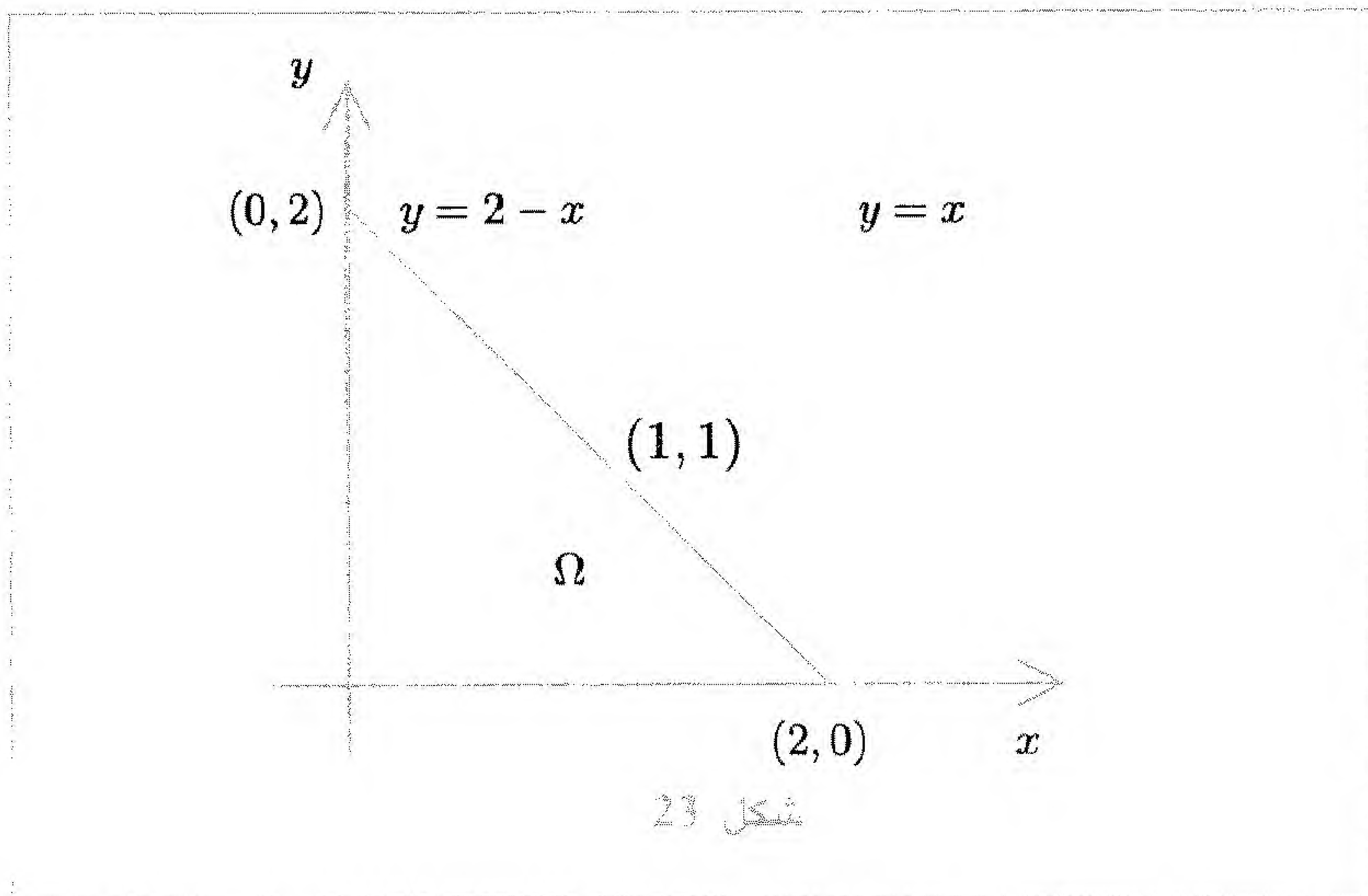
$$P(x,y) = 1 + 2x + y$$

المسافة مقيسة بالأمتار، والكتلة بالكيلوجرام، أوجد الكتلة، ومركز الكتلة للصفيحة.

الحــل

$$\begin{aligned} M &= \iint_{\Omega} P(x,y)dA \\ &= \int_0^1 \int_y^{2-y} (1 + 2x + y)dx\, dy \\ &= \int_0^1 (x + x^2 + xy)\Big|_y^{2-y} dy \\ &= \int_0^1 (6 - 4y - 2y^2)dy = \frac{10}{3}\, kg \end{aligned}$$

ويترك للقارئ أن يبين: $(x,y) = (1.1, 0.35)$



شكل 23

تمارين

أوجد المساحة المحددة بالمعادلات أو المتباينات المذكورة وارسم المنطقة R في كل حالة:

1) $y = x$ ، $y = 3x$ ، $x + 4 = 4$

2) $y = 1$, $y = 0$, $y = ln|x|$

3) $y = \sqrt{x}$, $y = -x$, $x = 1$, $x = 4$

4) $x - y = 4$, $y = -1$, $y = 2$, $y^2 = -x$

5) $x = y^2$, $y - x = 2$, $y = -2$, $y = 3$

6) $x - y + 1 = 0$, $7x - y - 17 = 0$, $2x + y + 2 = 0$

7) $y = e^x$, $y = sin\ x$, $x = -\pi$, $x = \pi$

8) $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$

9) $x = y^2$, $x = 32 - y^2$

10) $x = 2$, $x = y^2$, $x = 4y^2 - 3$

11) $y = cosh\ x$, $y = sinh\ x$ في الفترة $[-1,1]$.

أوجد كتلة المنطقة R في الحالات الآتية

12) المنطقة R داخل الدائرة $x^2 + y^2 = 46$ حيث أن $P(x, y) = x^2 + y^2$

13) المنطقة R محددة بالمنحنيين $y = x^2$ و $y^2 = x$ حيث أن $P = 3y$

14) المنطقة R محددة بالمستطيل الذي رؤوسه $(0,0), (a,0), (a,b), (0,b)$ حيث أن:

$$P = \frac{3x}{1 + x^2 y^2}$$

أوجد حجم المجسمات $V(S)$ المذكور في الحالات التالية:

15) المجسم S محدد بالمعادلة التالية:

$$x + y + z = 3 \ , \ y = 0 \ , \ x^2 + z^2 = 4$$

16) المجسم S محدد بالمعادلتين:

$$y = x - \frac{3}{2} \ , \ y^2 + z^2 = 2x$$

17) المجسم S محدد بالمعادلتين:

$$z^2 = 4 - y \ , \ y = x^2$$

5.2 تغيير المتغيرات في التكامل

نظرية 3

إذا كانت $f(x)$ متصلة على الأقل في $x_1 \leq x \leq x_2$ و $x = x(u)$ معرفة في $u_1 \leq u \leq u_2$ ومشتقتها الأولى متصلة مع $x_1 = x(u_1)$ و $x_2 = x(u_2)$ و $f[x(u)]$ متصلة في $u_1 \leq u \leq u_2$ فإن:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = \int_{u_1}^{u_2} f[x(u)] \frac{dx}{du} du \qquad (1)$$

البرهان

إذا كانت $F(x)$ تكاملاً غير محدد أو لانهائياً للدالة $f(x)$، فإن:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = F(x_2) - F(x_1) \qquad (1)$$

ولكن $F[x\ (u)]$ تكون تكاملاً لانهائياً للدالة $f[x(u)] \dfrac{dx}{du}$

وبتطبيق قاعدة السلسلة:

$$\frac{dF}{du} = \frac{dF}{dx}\,\frac{dx}{du} = f(x)\frac{dx}{du} = f[x(u)]\frac{dx}{du} \qquad (2)$$

وبتكامل طرفي المعادلة (2) نجد أن:

$$F[x(u_2)] - F[x(u_1)] = F(x_2) - F(x_1) = \int_{u_1}^{u_2} f[x, u]\frac{dx}{du} \qquad (3)$$

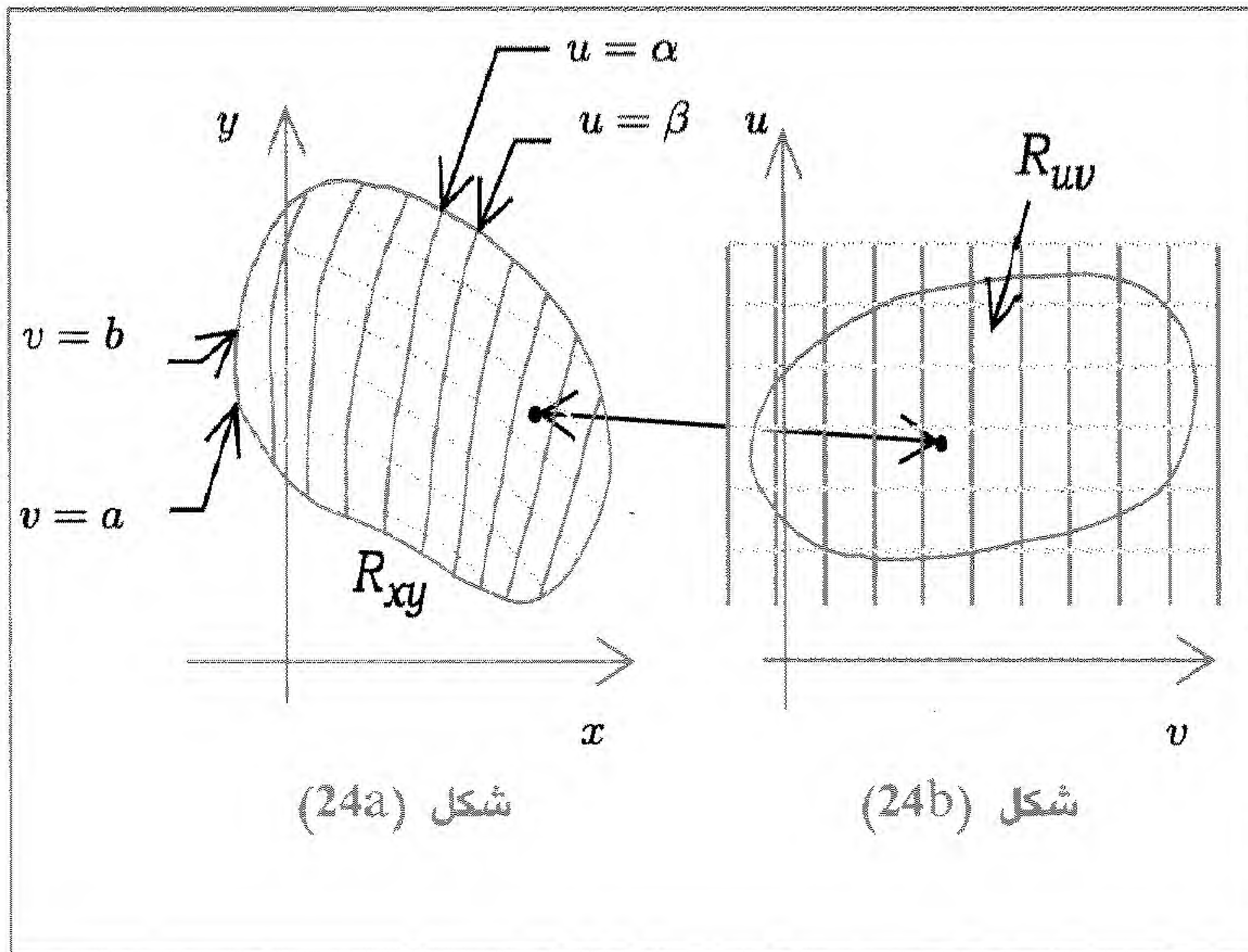
من (1) و(3) يكتمل البرهان.

نظرية 4

إذا كانت الدالة $f(x,y)$ متصلة في R_{xy}، وإذا كانت الدالتان $x = x(u,v)$ و $y = y(u,v)$ معرفتين ولهما مشتقات أولية متصلة في R_{uv}، وإذا كانت الدالتان العكسيتان $u = u(x,y)$ و $v = v(x,y)$ معرفتين ومتصلتين في R_{xy} حيث أن $f[x(u,v)\ ,\ y(u,v)]$ متصلة في R_{uv}، فإن:

$$\iint\limits_{R_{xy}} f(x,y)dx\ dy = \iint\limits_{R_{uv}} f[x(u,v),y(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\ dv$$

المعادلتان $x = x(u,v)\ ,\ y = y(u,v)$ يمكن اعتبارهما كمقدمة للإحداثيات الخطية المنحنية في المستوى $x\,y$ كما هو موضح في الشكل (24a).



شكل (24a) شكل (24b)

المستقيمات (مقدار ثابت = u) و(مقدار ثابت = v) تكون نظام منحنيات موازية للمحورين ومن الطبيعي استخدامهما لتقسيم المنطقة R_{uv} إلى عناصر أو جزيئات من المساحة ΔA لتكوين التكامل الثنائي، وعند اعتبار العناصر الخطية

المنحنية، الحجم (تحت السطح $z = f(x,y)$) يقدر بـ $f(x,y)\Delta A$ حيث ΔA ترمز إلى أحد العناصر الخطية المنحنية.

إذا أمكن التعبير عن ΔA بـ $J\Delta u\ \Delta v$ والدالة $f(x,y)$ بـ $f((x(u)\ ,\ y(v))$ فإن:

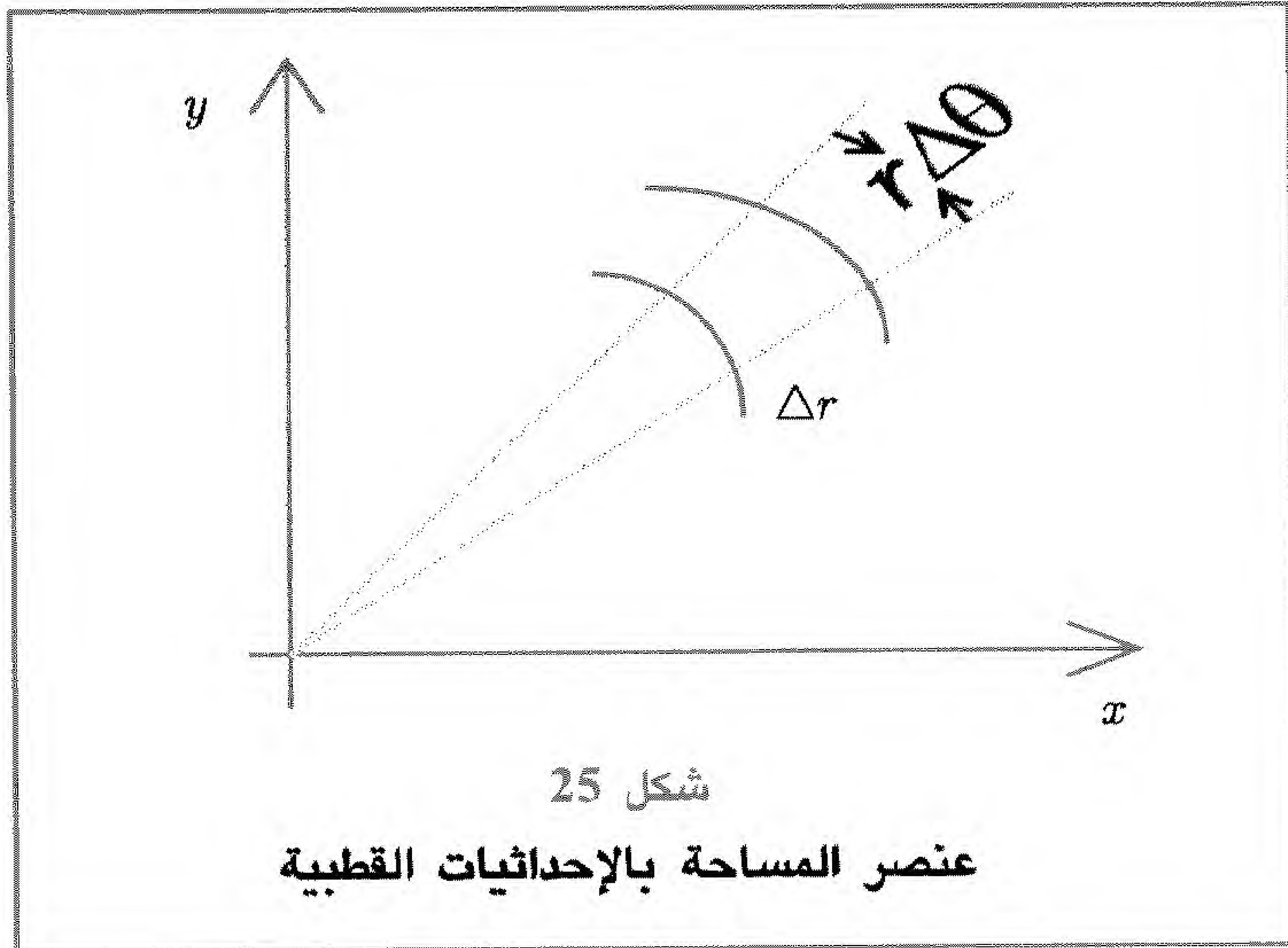
$$\sum_i f[x(u,v)\ ,\ y(u,v)]J\Delta u\ \Delta v = \iint_{R_{uv}} f[x(u,v)\ ,\ y(u,v)]J du\ dv$$

حيث أن $J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$

العدد J (الجاكوبي) يمكن تفسيره بـ $\frac{\Delta\ A_{xy}}{\Delta\ A_{uv}}$ حيث أن $\Delta\ A_{xy}$ و $\Delta\ A_{uv}$ عنصرا المساحة في المستويين $x\ y$ و $u\ v$ على التوالي.

والإحداثيات القطبية تعتبر مثالاً للإحداثيات الخطية المنحنية.

$$y = r\ sin\ \theta \quad , \quad x = r\ cos\ \theta$$



شكل 25

عنصر المساحة بالإحداثيات القطبية

عنصر المساحة تقريباً مستطيل جوانبه Δr و$r\Delta\theta$ كما هو موضح في الشكل (25)، ولذلك يمكن التعبير عن التكامل الثنائي بالإحداثيات القطبية كما يلي:

$$\iint\limits_{R_{xy}} f(x,y)dx\,dy = \iint\limits_{R_{r\theta}} f(r\,cos\,\theta\,,\,r\,sin\,\theta)rd\theta dr$$

لاحظ أن الجاكوبي في هذه الحالة:

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} cos\theta & -r\,sin\theta \\ sin\,\theta & r\,cos\,\theta \end{vmatrix} = r$$

وإذا كانت المنطقة $R_{r\theta}$ محددة بـ $r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\,,\,\alpha \le \theta \le \beta$، فإن:

$$\iint\limits_{R_r} f(r\,cos\,\theta\,,\,r\,sin\,\theta)rd\,\theta\,d\theta = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\int\limits_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\,cos\,\theta\,,\,r\,\sin\,\theta)rd\,rd\theta$$

وفي بعض المسائل يكون من السهل إيجاد التكامل حسب الترتيب $d\theta\,dr$ فإذا كانت R محددة بـ $\theta_1(r) \le \theta \le \theta_2(r)\,,\,a \le r \le b$، فإن:

$$\iint\limits_{R_{r\theta}} f(r\,cos\,\theta\,,\,r\,sin\,\theta)rdrd\theta = \int\limits_{a}^{b}\int\limits_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} f(r\,cos\,\theta\,,\,r\,sin\,\theta)rd\theta dr$$

مثــال 1

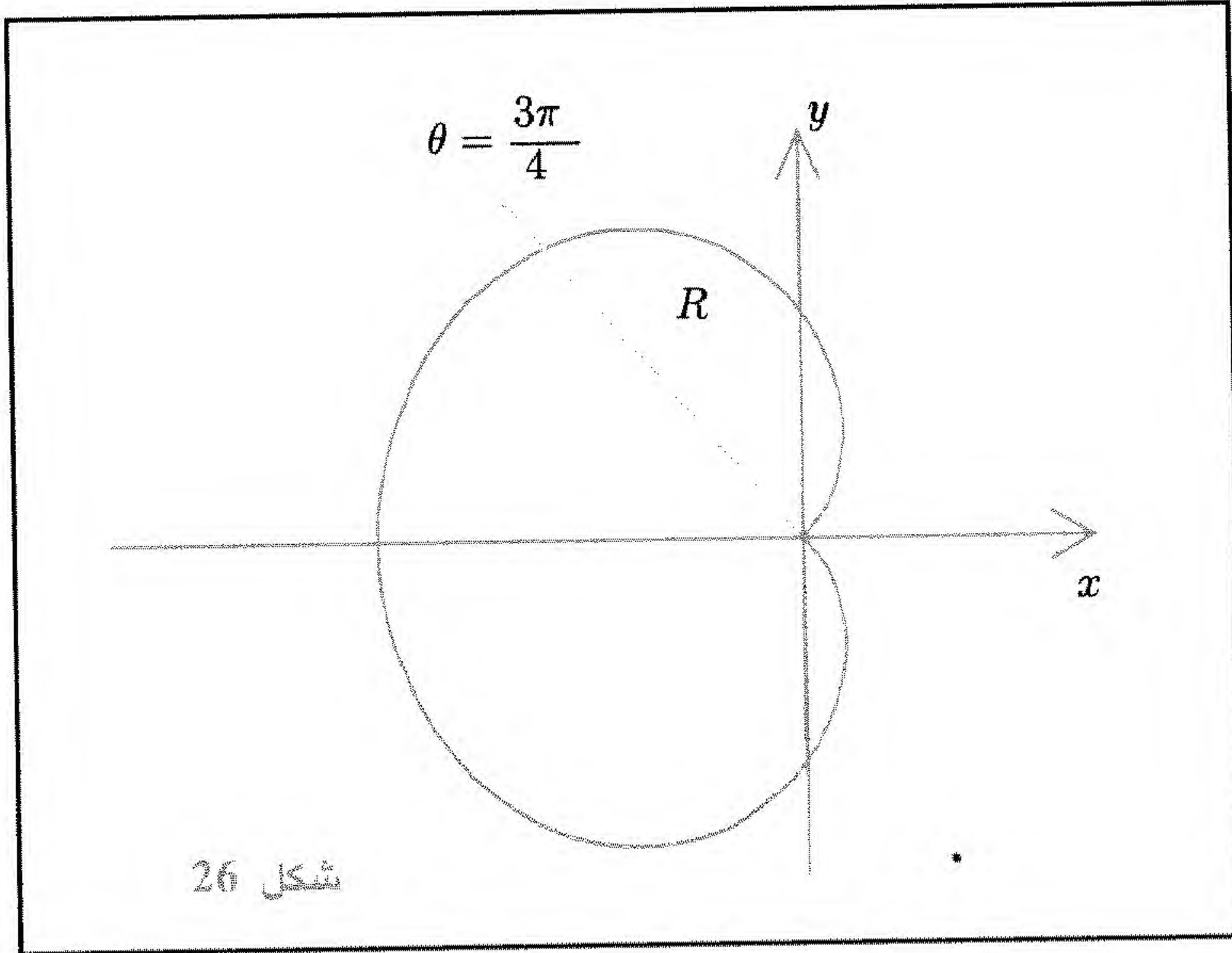
أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمستقيم $y=-x$ والمنحنى

$$x^2+y^2 = 3\sqrt{x^2+y^2}-3x$$

الحــل

نستخدم الإحداثيات القطبية لوصف المنطقة R.

المنحنى $r^2 = 3r - 3rcos\,\theta$ أو $r = 3(1-cos\,\theta)$، وهي تمثل معادلة قلب، والمعادلة القطبية للمستقيم $y=-x$ هي $\theta = \frac{3\pi}{4}$



شكل 26

من الرسم نلاحظ أن المنطقة محددة بـ

$$0 \le r \le 3(1 - \cos\theta) \quad \text{و} \quad 0 \le \theta \le \frac{3\pi}{4}$$

مساحة المنطقة R:

$$A(R) = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{3(1-\cos\theta)} r\, dr\, d\theta$$

$$= 4.5 \int_0^{\frac{3\pi}{4}} (1 - \cos\theta)^2 d\theta$$

$$= 4.5 \left[\frac{3\theta}{2} - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= 4.5 \left[\frac{9\pi}{8} - \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\right] = 8.4153516$$

مثال 2

إذا كانت R المنطقة المحددة: $0 \le x \le \sqrt{1-y^2}$, $0 \le y \le 1$ فأوجد:

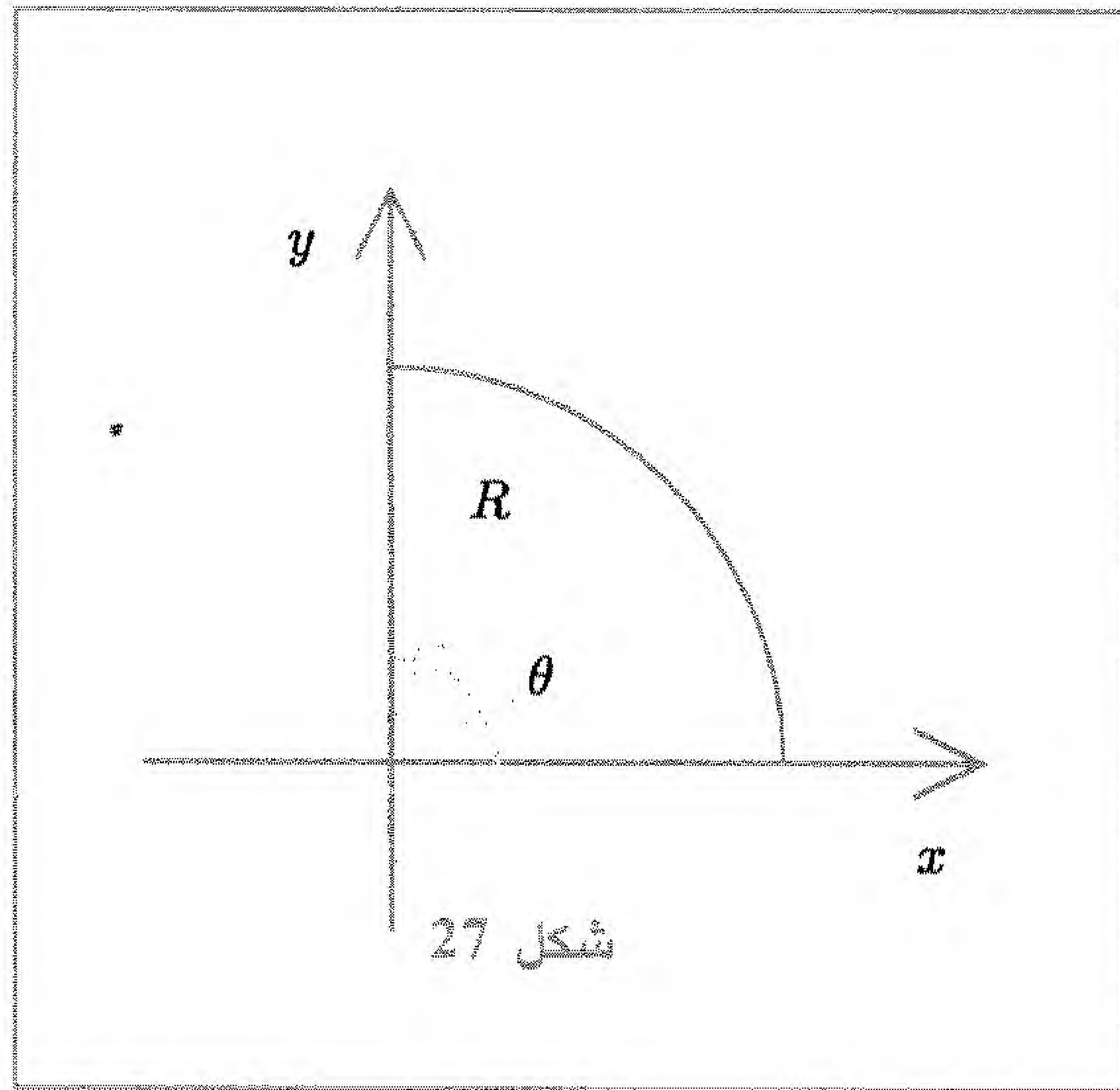
1 ـ مساحة المنطقة R

2 ـ قيمة التكامل $\iint_R \sin(x^2 + y^2) dA$

الحـل

المنطقة R عبارة عن ربع دائرة نصف قطرها 1 كما هو موضح بالرسم.

إذن مساحة المنطقة R هي $\frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{\pi}{4}$



شكل 27

من الرسم نلاحظ أن النقطة R محددة كما يلي:

$$0 \le r \le 1 \quad \text{و} \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

ومن الممكن إيجاد المساحة باستخدام التكامل الثنائي:

$$A(R) = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \, d\theta \, dr = \int_0^1 \frac{\pi}{2} r \, dr$$

$$= \left. \frac{\pi r^2}{4} \right|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

هل يمكن إيجاد المساحة باستخدام الإحداثيات الديكارتية؟

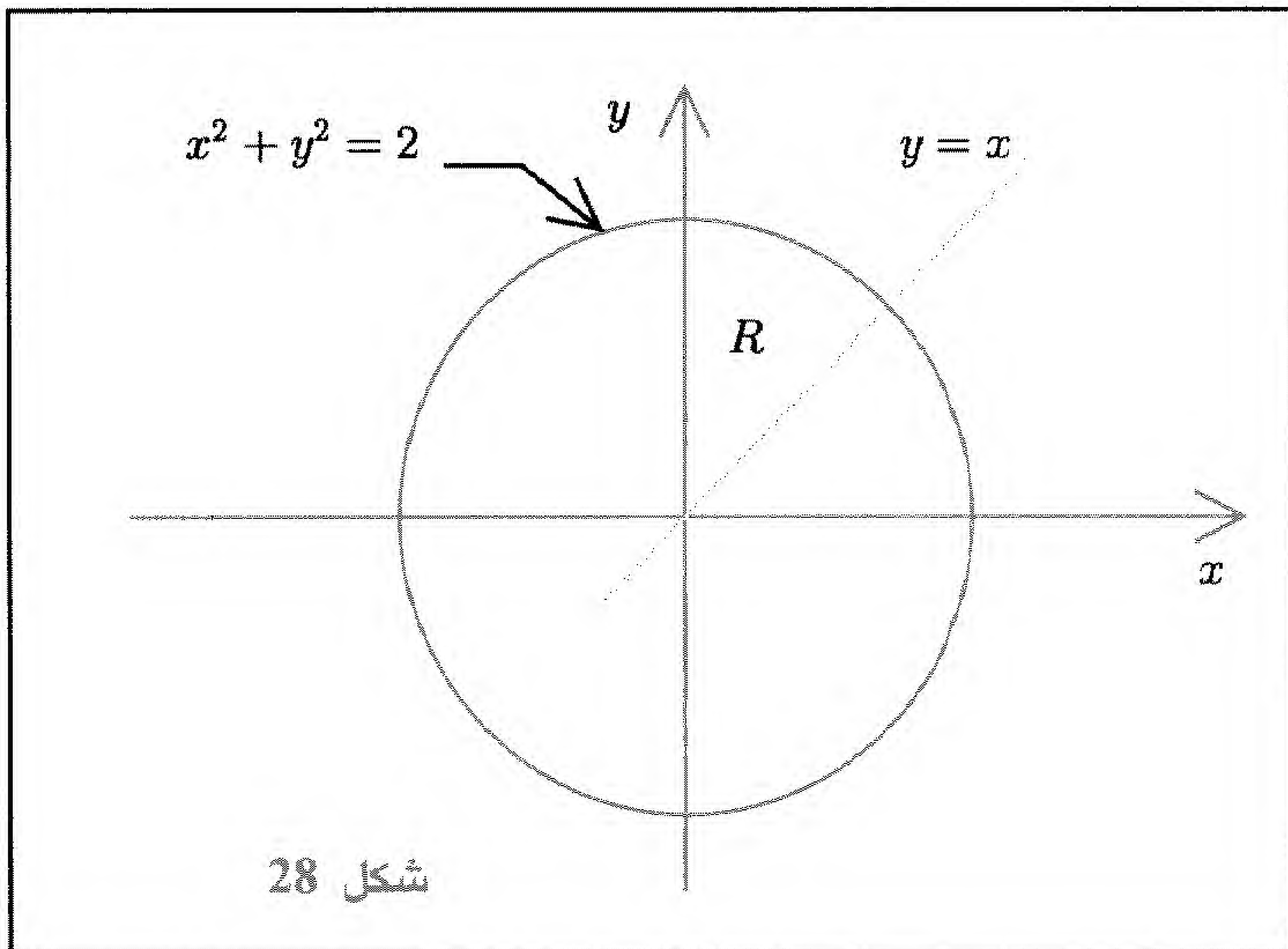
لاحظ أن:
$$\iint_R sin(x^2+y^2)dA = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} sin(x^2+y^2)dx\,dy$$

التكامل لا يمكن إيجاده على الصورة السابقة حتى لو تم تغيير ترتيب التكامل، أي $(dy\,dx)$، ولذلك سنستخدم الإحداثيات القطبية (تغيير المتغيرات).

ومن الرسم أيضاً:
$$\iint_R sin(x^2+y^2)dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 sin(r^2)r\,dr\,d\theta$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(cos(r^2)\Big|_0^1 \right) d\theta$$
$$= -\frac{1}{2}(cos(1)-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$
$$= \frac{\pi}{4}(1-cos(1)) = 0.361045724$$

مثال 3

أوجد قيمة التكامل $\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{2-y^2}} dx\,dy$



شكل 28

ويتضح من الرسم أن مساحة المنطقة R

$$=\frac{1}{8}\pi\, r^2=\frac{\pi}{4}$$

ويمكن إيجاد المساحة باستخدام التكامل

$$\int_0^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{2-y^2}} dx\, dy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{2}} r\, dr\, d\theta$$

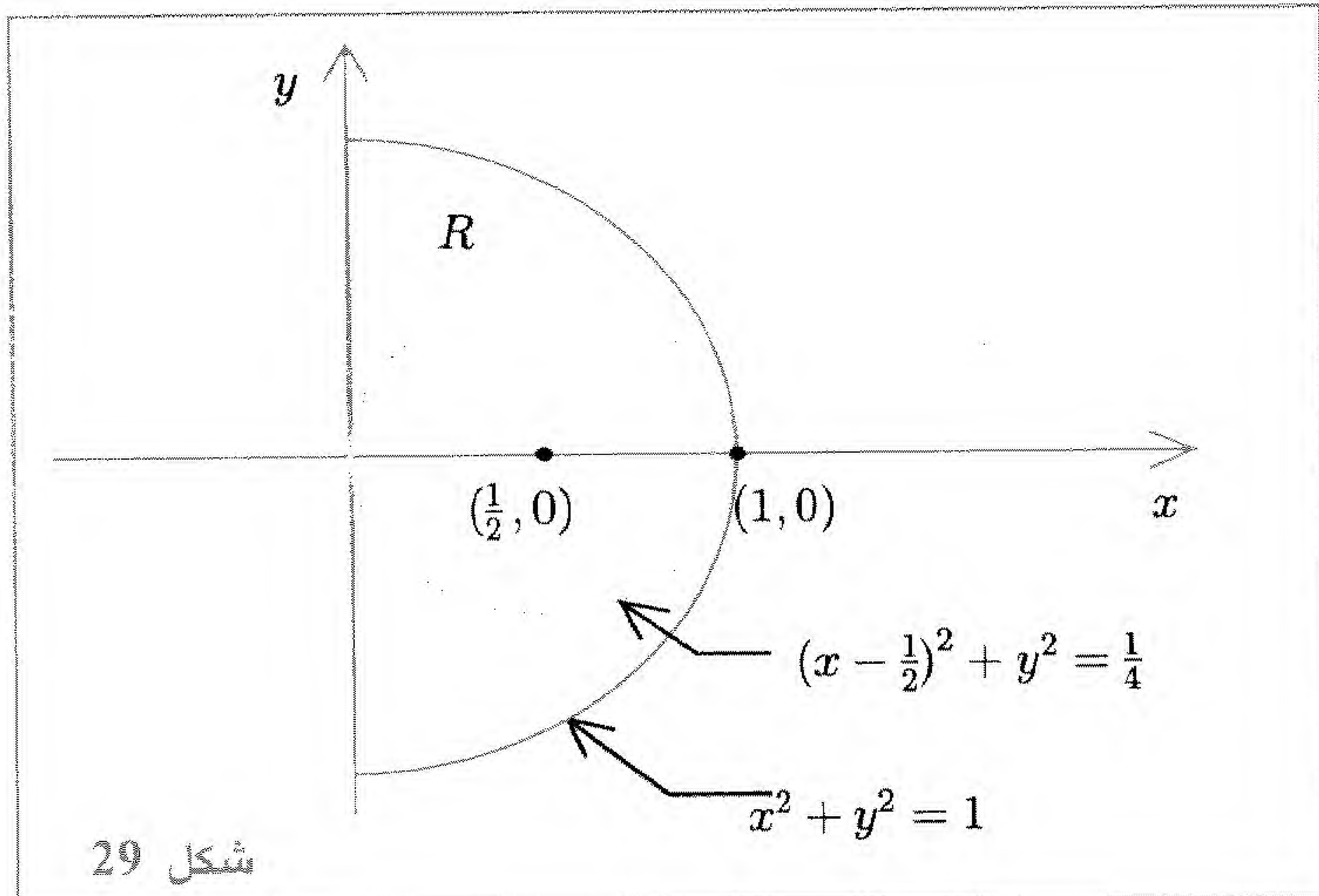
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta=\frac{\pi}{4}$$

مثــال 4

أوجد قيمة التكامل $\int_0^1\int_{\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, dx$

الحــل

المنطقة R محددة بما يلي $\sqrt{x-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\;\;,\;\;0\le x\le 1$



شكل 29

ولذلك $y=\sqrt{x-x^2}$ وهذا يتضمن $y^2+x^2=x$ أو $y^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

وكذلك $y=\sqrt{1-x^2}$ وهذا يتضمن $y^2+x^2=1$

لاحظ أن نصف قطر الدائرة الصغيرة $r_1=\frac{1}{2}$ ونصف قطر الدائرة الكبيرة $r_2=1$ ولذلك فإن مساحة المنطقة R هي:

$$A(R)=\frac{1}{4}\pi r_2^2-\frac{1}{2}\pi r_1^2$$

$$=\frac{1}{4}\pi(r_2^2-2r_1^2)=\frac{\pi}{8}$$

ويمكن إيجاد المساحة باستخدام التكامل

$$A(R)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{\cos\theta}^{1} 6\ dr\ d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)d\theta$$

ولكن $1-\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

إذن $$A(R)=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2\theta)d\theta=\frac{\pi}{8}$$

مثـــال 5

أوجد مساحة المنطقة R حيث R تقع داخل المنحنى $r=1+\cos\theta$

الحـــل

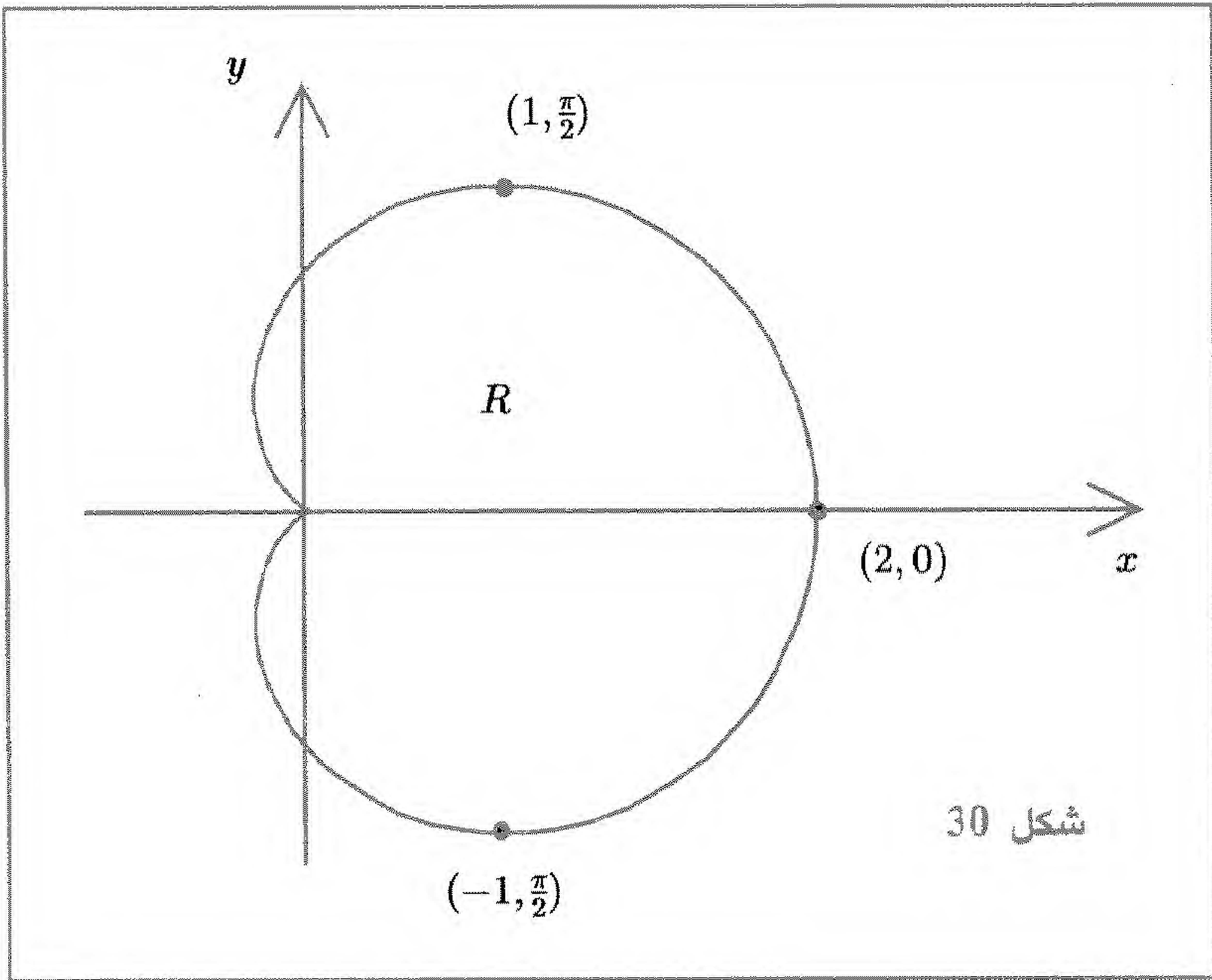
$$A(R)=\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\theta} rdrd\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\Big|_0^{1+\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\Big(1+2cos\theta+12(1+cos2\theta)\Big)d\theta$$

وبعد إجراء عملية التكامل والتعويض عن θ نجد أن $A(R)=\dfrac{3\pi}{2}$

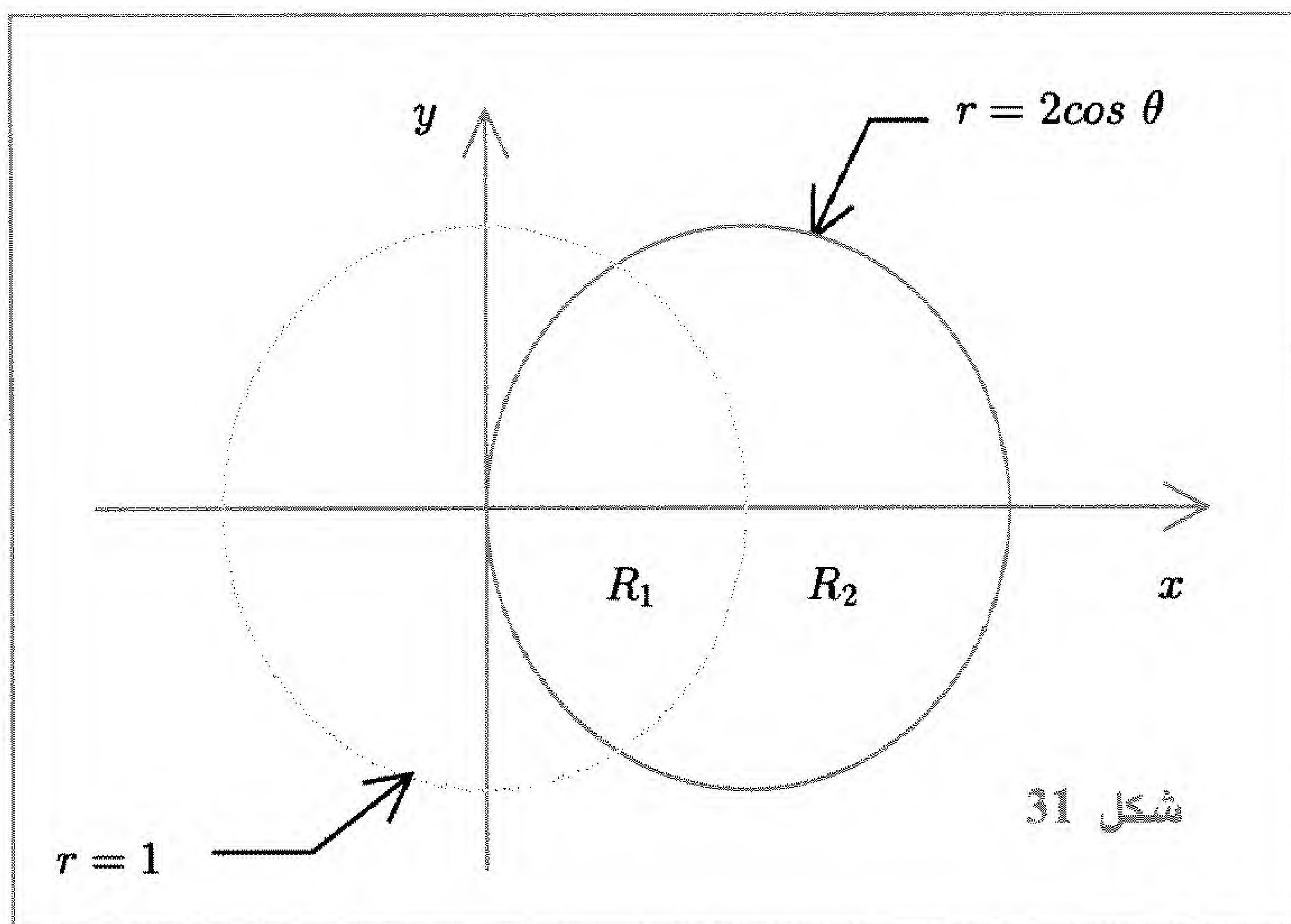


شكل 30

مثـــال 6

أ) أوجد مساحة المنطقة الواقعة داخل الدائرة $r=2cos\ \theta$ وخارج الدائرة $r=1$.

ب) أوجد مساحة تقاطع الدائرتين.



شكل 31

الحــل

أ) تتقاطع الدائرتان عند $1 = 2\cos\theta$ أو $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$

ولذلك

$$A(R_2) = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{1}^{2\cos\theta} r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(r^2\Big|_1^{2\cos\theta}\right) d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (4\cos^2\theta - 1)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2\cos\theta + 1)\,d\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.91322955$$

ب) مساحة الدائرة $r = 2\cos\theta$ تساوي π

مساحة منطقة التقاطع تكون:

$$A(R_1) = \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1.228369699$$

مثـــال 7

أوجد حجم الكرة التي مركزها نقطة الأصل، ونصف قطرها a.

الحــل

معادلة سطح الكرة

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

ومنها $z = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

إذن المطلوب إيجاد الحجم تحت السطح $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$، وفوق القرص $x^2 + y^2 \leq a^2$ وهو يمثل نصف حجم الكرة.

وباستخدام التكامل الثنائي نجد أن:

$$V = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dy\, dx$$

(واضح أنه يجب استخدام الإحداثيات القطبية لإيجاد قيمة التكامل الثنائي).

وباستخدام الإحداثيات القطبية يكون حجم نصف الكرة:

$$V = \int_0^a \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - r^2}\; r\, d\theta\, dr$$

$$= 2\pi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\; r\, dr$$

$$= -\frac{3}{2}\pi(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a$$

$$= -\frac{2}{3}\pi(0 - a^3)$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3$$

وهكذا حجم الكرة يكون $\frac{4}{3}\pi\, a^3$

مثـال 8

أوجد حجم المجسم المحدد من أعلى بالسطح $z = 3 + r$ ومن أسفل بالمنطقة المحددة بالمعادلة $r = 1 + sin\ \theta$.

الحـل

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+sin\theta} (3+r) r dr\ d\theta$$

ويترك للقارئ أن يبين أن

$$V = \frac{37}{6}\pi$$

مثـال 9

أوجد $\int_0^4 \int_{y/2}^{(y/2)+1} \frac{2x-y}{2} dx\ dy$

مستخدماً التعويض $v = \frac{y}{2}$ ، $u = \frac{2x-y}{2}$

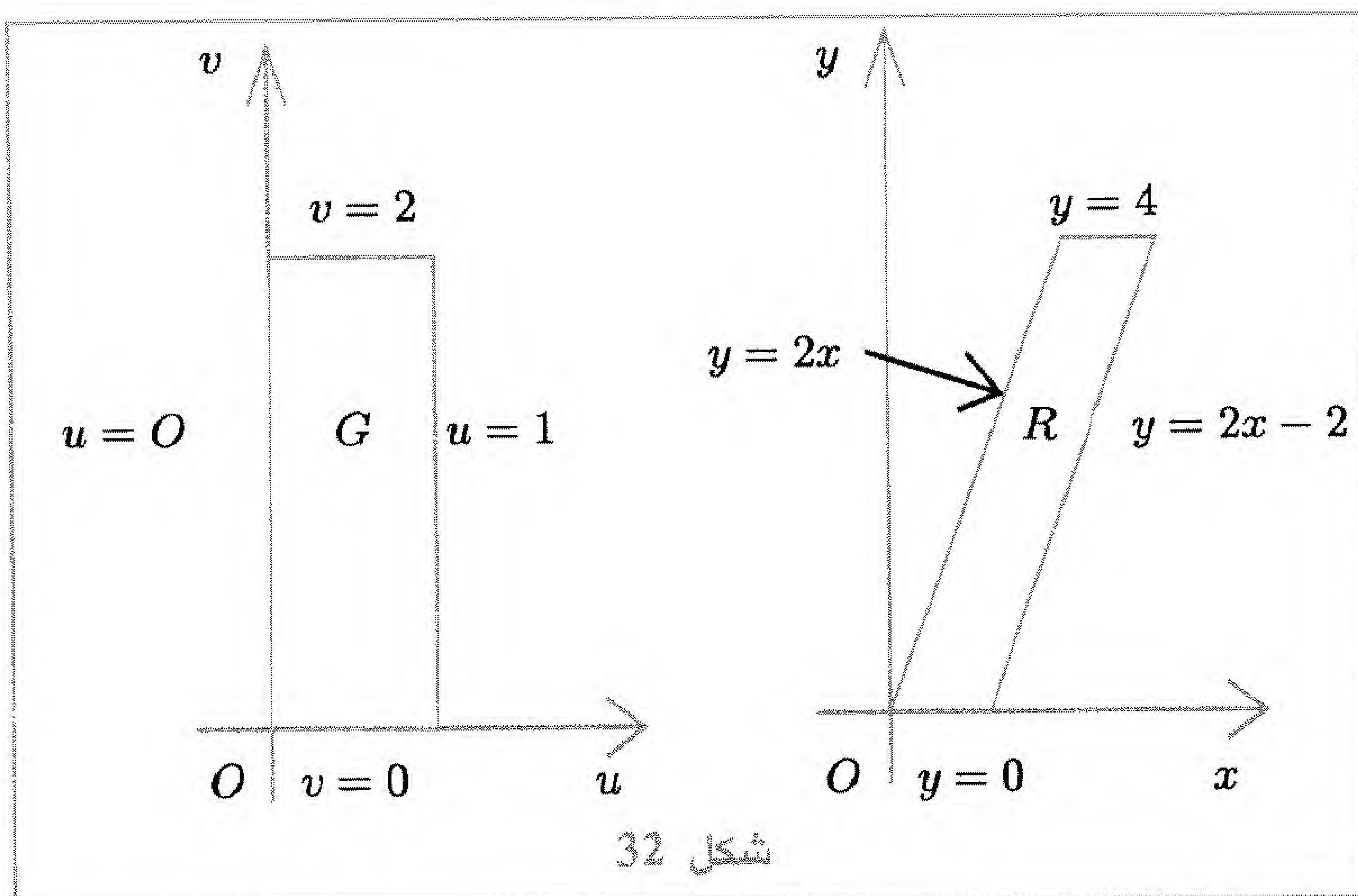
الحـل

أولاً نرسم المنطقة R في المستوى $x\,y$ ونعين حدود المنطقة، أنظر الشكل (32).

ولتطبيق النظرية (4) يتطلب إيجاد المنطقة المناظرة G في المستوى $u\,v$ ومحدد جاكوبي للتحويل. ويمكن ذلك بإيجاد x وy بدلالة u، v من معادلتي التحويل، أي أن:

$$y = 2x$$

$$x = u + \frac{1}{2}y = u + v$$



شكل 32

ويمكن إيجاد حدود المنطقة G في المستوى $u\,v$ بالتعويض عن x و y في حدود المنطقة R كما هو موضح في الجدول التالي:

حدود المنطقة G في المستوى $u\,v$	التعويض عن x، y في حدود R	حدود R في المستوى $x\,y$
$u = 0$	$u + v = v$	$x = y/2$
$u = 1$	$u + v = v + 1$	$x = (y/2) + 1$
$v = 0$	$2v = 0$	$y = 0$
$v = 2$	$2v = 4$	$y = 4$

محدد جاكوبي يكون:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

والآن يوجد لدينا كل شيء لتطبيق النظرية (4):

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{(y/2)+1} \frac{2x-y}{2} dx\, dy = \int_0^2 \int_0^1 uJdudv$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 2ududv = \int_0^2 dv = 2$$

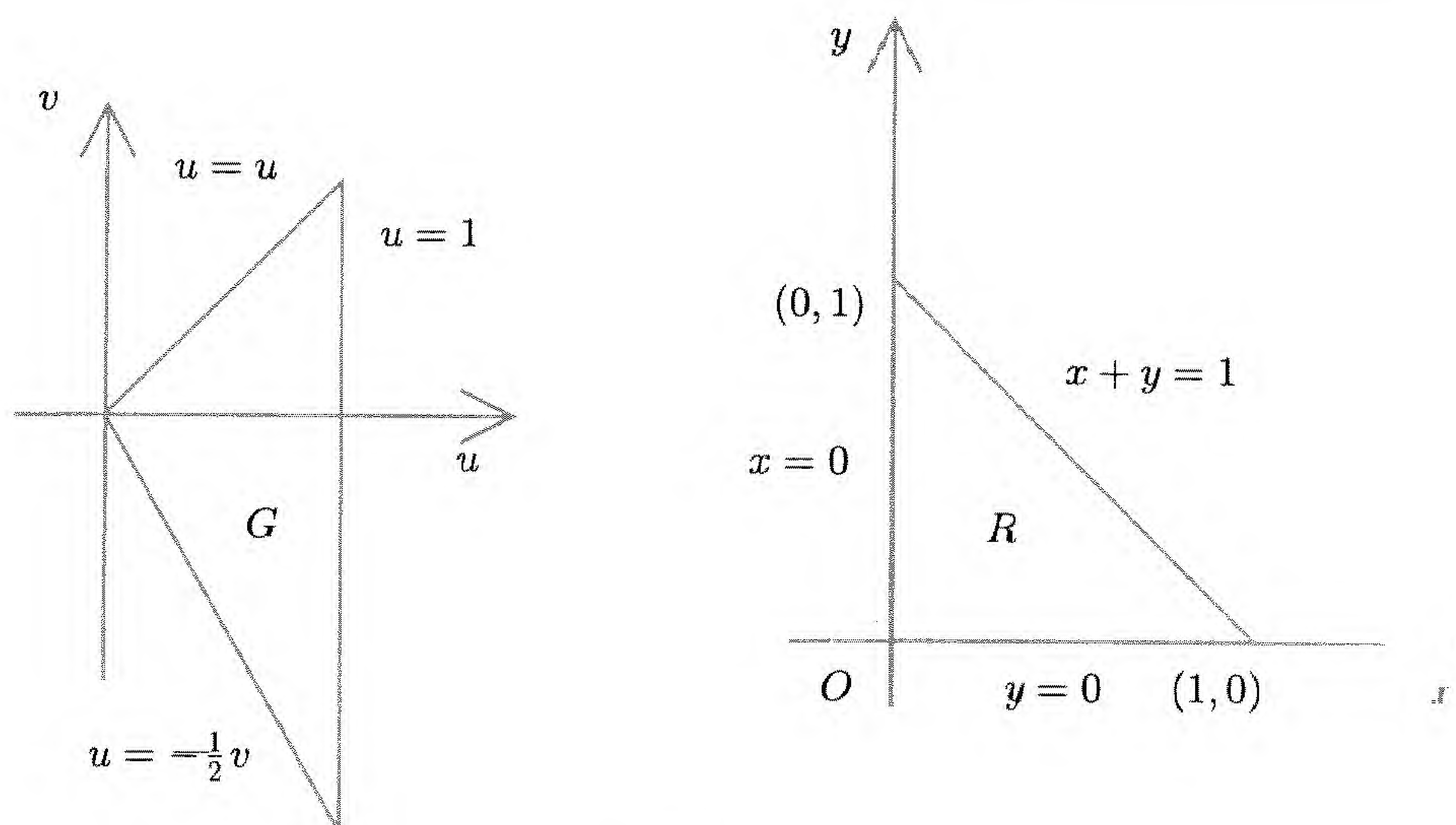
مثــال 10

أوجد قيمة التكامل $\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2 dydx$

الحــل

أولاً ترسم المنطقة R في المستوى $x\,y$ وتعين حدود المنطقة R كما هو موضح بالشكل (33). وبعد فحص الدالة المكاملة (Integrand) يمكن استخدام التحويل:

$u = x + y$ و $v = y - 2x$



شكل 33

وبعد حل المعادلتين السابقتين معاً نحصل على:

$$y = \frac{1}{3}(2u+v) \quad و \quad x = \frac{1}{3}(u-v)$$

وتوجد حدود المنطقة G في المستوى $u\ v$ كما في المثال السابق

$$R_{xy} \Longrightarrow G_{uv}$$

$$x+y=1 \Longrightarrow u=1$$

$$x=0 \Longrightarrow u=v$$

$$y=0 \Longrightarrow u=-\frac{1}{2}v$$

ويحسب محدد جاكوبي كما يلي:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

وبعد فك المحدد نجد أن:

$$J = \frac{1}{3}$$

وهكذا

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2 dydx$$
$$= \int_0^1 \int_{-2u}^{u} \sqrt{u}(v^2)\left(\frac{1}{3}\right) dvdu = \frac{2}{9}$$

ويترك للقارئ إجراء عملية التكامل بالتفصيل والتحقق من صحة النتيجة.

مثـال 11

أوجد

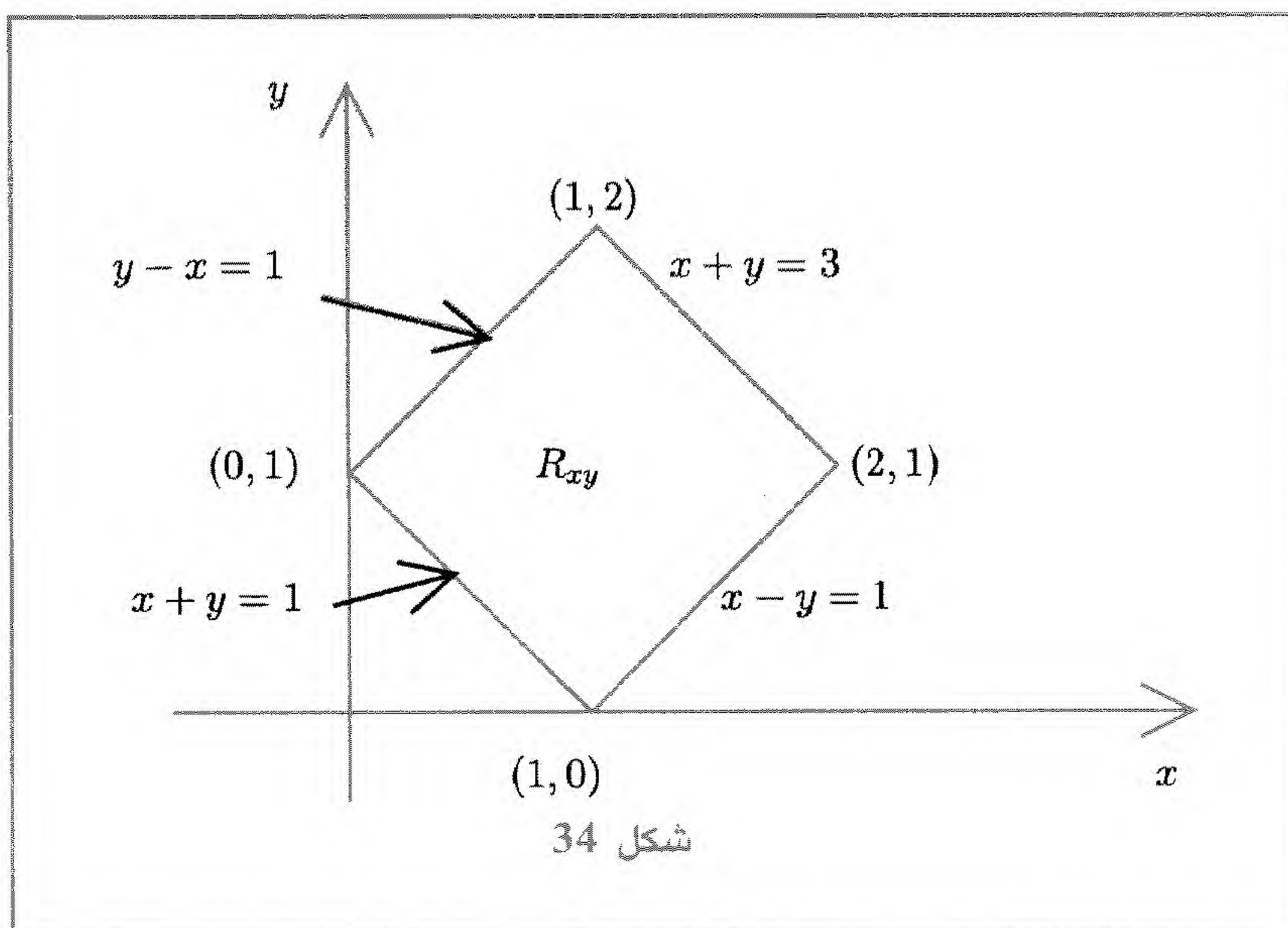
$$\iint\limits_R (x-y)^2 cos^2(x+y)dxdy$$

حيث أن R شبه المنحرف الذي رؤوسه:

$$(0,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,1)\ ,\ (1,0)$$

الحـل

المنطقة R في المستوى $x\,y$ موضحة بالشكل (34).



شكل 34

من الدالة المكاملة (Integrand) يفضل استخدام التحويل:

$$u = x \quad \text{و} \quad v = x + y$$

وبعد حل المعادلتين السابقتين نحصل على:

$$y=\frac{1}{2}(-u+v) \quad , \quad x=\frac{1}{2}(u+v)$$

يمكن تحديد حدود المنطقة G من معادلات حدود المنطقة R في المستوى $x\,y$ كما يلي

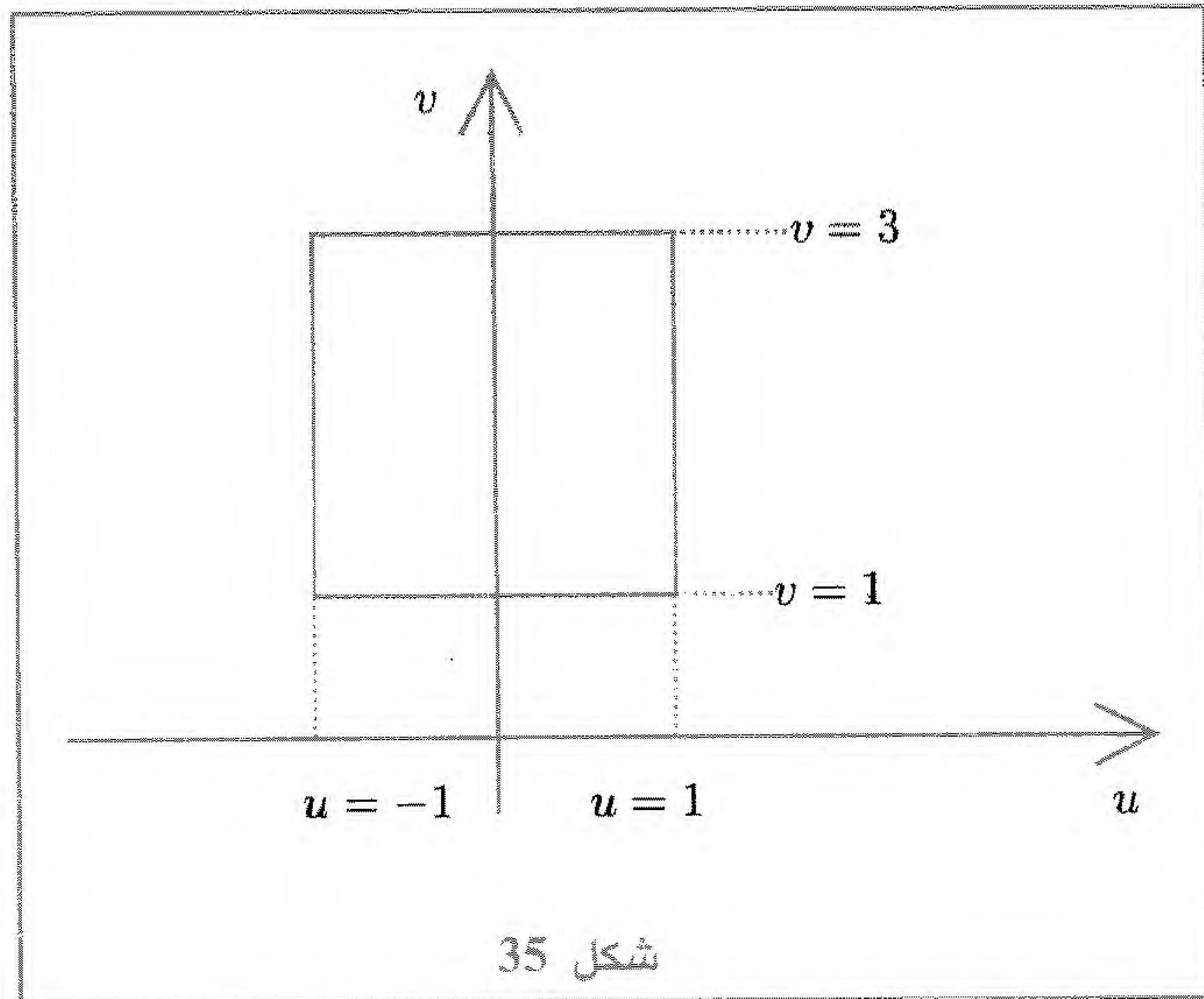
$$x-y=1 \implies u=1$$

$$x-y=3 \implies v=3$$

$$x+y=1 \implies v=1$$

$$y-x=1 \implies u=-1$$

المنطقة G في المستوى $u\,v$ موضحة بالشكل (35).



شكل 35

ويمكن إيجاد محدد جاكوبي للتحويل كما يلي:

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

وهكذا

$$\iint_R (x-y)^2 cos^2(x+y)dxdy$$

$$= \int_1^3 \int_{-1}^1 u^2 cos^2 v \left(\frac{1}{2}\right) dudv$$

$$= \int_1^3 \frac{1}{3} cos^2 v dv$$

$$= \frac{1}{6}\int_1^3 (1+cos2v)dv$$

$$= \frac{1}{6}\left[v+\frac{1}{2}sin\ 2v\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{6}\left[2+\frac{1}{2}(sin6-sin2)\right]$$

$$= 0.2342739$$

مثـال 12

أوجد قيمة التكامل التالي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

الحـل

التكامل السابق يعتبر من أهم التكاملات التي يصادفها القارئ في نظرية الاحتمالات، وفي هذا المثال سنبين كيف يمكن استخدام التكامل الثنائي والإحداثيات القطبية لإيجاد قيمته.

نفرض أن:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

واضح أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2I$$ (لماذا؟)

وبما أنه يمكن استخدام أي متغير في إيجاد قيمة التكامل، فإن:

$$I = \int_{0}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

وهكذا

$$I^2 = \left(\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)\left(\int_{0}^{\infty} e^{-y^2} dy\right)$$
$$= \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx\ dy$$

وباستخدام الإحداثيات القطبية نجد أن:

$$I^2 = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r\ d\theta\ dr$$
$$= \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2} r\ dr$$
$$= -\frac{\pi}{4}\lim_{a\to\infty} e^{-r^2}\Big|_{0}^{a}$$
$$= -\frac{\pi}{4}\lim_{a\to\infty}\left(e^{-a^2} - 1\right) = \frac{\pi}{4}$$

وهذا يتضمن $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

ومنها $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$

ويترك للقارئ أن يبين $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$

(**إيضاح** استخدام التعويض $u = \frac{x}{\sqrt{2}}$).

تمارين

عبر عن التكاملات الآتية كتكاملات جزئية واستخدم الإحداثيات القطبية لإيجاد قيمة كل منها :

1) $\iint\limits_R x\,y\,dA$ حيث أن R المنطقة المحددة بالمنحنى $r = 4$.

2) $\iint\limits_R (x^2+y^2)dA$ حيث أن R المنطقة المحددة بالمنحنى $r = 2(1+sin\theta)$

3) $\iint\limits_R (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dA$ حيث أن R المنطقة المحددة بالمنحنى $r = 2+cos\theta$

أوجد مساحة المنطقة R في المستوى $x\,y$ مستخدماً الإحداثيات القطبية

4) المنطقة المحددة بالمنحنى $r = 2+sin\theta$.

5) المنطقة داخل القلب $r = 1+cos\theta$ وخارج الدائرة $r = \frac{1}{2}$

أوجد قيمة التكاملات الآتية مستخدماً الإحداثيات القطبية

6) $\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dy\,dx$

7) $\int\limits_{0}^{a}\int\limits_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dy\,dx$

8) $\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}$

9) $\int\limits_{0}^{2}\int\limits_{0}^{\sqrt{4-y^2}} cos(x^2+y^2)dx\,dy$

10) $\int\limits_{0}^{2a}\int\limits_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} dy\,dx$

11) $\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\,dx$

12) $\int\limits_{0}^{2a}\int\limits_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}} x^2\,dy\,dx$

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنى أو المنحنيات التالية:

13) $r = 1 - \cos\theta$ 　　 14) $r = 4(1 + \cos\theta)$

15) $r^2 = \cos 2\theta$ 　　 16) $r = 3 - 2\sin\theta$

17) $r = \tan 2\theta$ والمستقيم $\theta = \frac{\pi}{4}$

18) أوجد حجم المجسم المحدد بالمخروط $z^2 = x^2 + y^2$ والأسطوانة $x^2 + y^2 = 4$

19) أوجد مساحة المنطقة التي تقع داخل المنحنى $(x^2 + y^2)^3 = 9y^2$

20) بيّن أن $\iint_{\Omega} \frac{dA}{1 + x^2 + y^2} = \pi \ln 2$

حث أن Ω قرص الوحدة $(r = 1)$.

21) أوجد

$$\iint_R (4x - 4y + 1)^{-2} dx dy$$

حيث أن R المنطقة المحددة بالمعادلات التالية:

$$x = \sqrt{-y} \quad ، \quad x = y \quad و \quad x = 1$$

حيث أن: $x = u + v$ ، $y = v - u^2$

22) أوجد

$$\iint_R (x^2 + 2y^2) dx\, dy$$

حيث أن R منطقة في الربع الأول ومحددة برسم المعادلات:

$$xy = 1 \;,\; xy = 2 \;,\; y = x \;,\; y = 2x$$

(23 أوجد

$$\iint_R \left(\sqrt{x-2y}+\frac{1}{4}y^2\right)dx\,dy$$

حيث أن R المثلث الذي رؤوسه $(4,2)$, $(4,0)$, $(0,0)$

حيث أن $u=\frac{1}{2}y$ ، $v=x-2y$

تمارين الفصل الثاني

أرسم منطقة التكامل ثم أوجد قيمة التكاملات التالية:

(1 $\int_{1}^{4}\int_{0}^{\sqrt{x}} \frac{3}{2} e^{\frac{y}{\sqrt{x}}}\, dy\, dx$

(2 $\int_{0}^{1}\int_{0}^{y^2} 3y^3 e^{xy} dx\, dy$

(3 $\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\sin x} y dy\, dx$

(4 $\int_{1}^{2}\int_{0}^{2\ln x} e^{x+y} dy\, dx$

(5 $\int_{0}^{1}\int_{-y}^{y} \sinh(y^2) dx\, dy$

(6 $\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{1+y^{\frac{3}{2}}} dx\, dy$

(7 $\int_{0}^{1}\int_{-y^{1/3}}^{y^{1/2}} 3x^2 y dx\, dy$

(8 $\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{y} (\sin^2 xy + \cos^2 xy) dx\, dy$

أرسم منطقة التكامل واكتب التكامل الثنائي المكافئ مع تغيير ترتيب التكامل

(9 $\int_{0}^{1}\int_{y}^{\sqrt{y}} x dy\, dx$

(10 $\int_{0}^{3/2}\int_{0}^{9-4x^2} 16x dy\, dx$

(11 $\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3xy\, dx\, dy$

(12 $\int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} x dy\, dx$

(13 $\int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{x^2+1} f(x,y) dy\, dx$

(14 $\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{2x} x^2 y\, dy\, dx$

(15 $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\exp(y)} xy\, dx\, dy$

(16 $\int_{0}^{1}\int_{1-x}^{1-x^2} f(x,y) dy\, dx$

أرسم منطقة التكامل وحدد ترتيب التكامل المناسب وأوجد قيمة التكامل لكل من التكاملات التالية:

(17 $\displaystyle\int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3}\, dy\, dx$ (18 $\displaystyle\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dydx}{y^4+1}$

(19 $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} dy\, dx$ (20 $\displaystyle\int_0^{1/16} \int_{y^{1/4}}^{1/2} cos(16\pi x^5) dx\, dy$

(21 $\displaystyle\iint_R (y-2x^2)dA$ حيث أن R المنطقة داخل المربع

$$|x|+|y|=1$$

(22 $\displaystyle\iint_R xydA$ حيث أن R المنطقة المحددة بالمستقيمات

$y=x$, $y=2x$ و $x+y=2$

الحجم تحت السطح $z=f(x,y)$

23) أوجد حجم المنطقة الواقعة تحت المجسم المكافئ $z=x^2+y^2$ وفوق المثلث المحدد بالمستقيمات $y=x$, $x=0$ و $x+y=2$ في المستوى $x\,y$.

24) أوجد حجم المجسم المحدد من أعلى بالأسطوانة $z=x^2$ ومن أسفل بالمنطقة المحددة بالقطع المكافئ $y=2-x^2$ والمستقيم $y=x$ في المستوى $x\,y$.

25) أوجد حجم المنطقة التي تشتمل على كل النقاط التي تقع داخل الأسطوانة $(x+1)^2+y^2=1$ وداخل الكرة $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$.

26) أوجد حجم المنطقة الواقعة داخل الأسطوانتين (المنطقة المشتركة):

$x^2+z^2=a^2$ و $y^2+z^2=a^2$

التكاملات على مناطق غير محدودة

أوجد قيمة التكاملات المعتلة التالية:

(27 $\int_{-1}^{1}\int_{-1/\sqrt{1-x^2}}^{1/\sqrt{1-x^2}} (2y+1)dy\,dx$

(28 $\int_{1}^{\infty}\int_{e^{-x}}^{1} \frac{1}{x^3y}dy\,dx$

(29 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}dx\,dy$

(30 $\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} xe^{-(x+2y)}dx\,dy$

(31 أوجد قيمة التكامل $\int_{0}^{2}(tan^{-1}\pi x - tan^{-1}x)dx$

(32 أوجد المنطقة R التي تجعل قيمة التكامل التالي قيمة عظمى وقيمة صغرى وبيّن السبب في كل حالة $\iint_R (4-x^2-2y^2)dA$

(33 أوجد قيمة التكامل $\int_{0}^{1}\int_{0}^{3} \frac{x^2}{(y-1)^{2/3}}dy\,dx$

المساحة (Area)

أوجد مساحة المنطقة المحددة أو المطوقة بـ

(34 المحوران والمستقيم $2x+y=2$

(35 القطع المكافئ $x=-y^2$ والمستقيم $y=x+2$

(36 القطاعان المكافئان $x=y^2$ و $x=2y-y^2$

(37 القطاعان المكافئان $x=y^2-1$ و $x=2y^2-2$

التكاملات القطبية

استخدم الإحداثيات القطبية لإيجاد قيمة التكاملات التالية:

38) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, dx$ 39) $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy\, dx$

40) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} ln(x^2+y^2+1)dx\, dy$ 41) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}dy\, dx$

42) أوجد مساحة المنطقة داخل القلب $r=1+cos\,\theta$ وخارج الدائرة $r=1$

43) أوجد مساحة المنطقة المشتركة التي تقع داخل القلبين $r=1+cos\,\theta$ و $r=1-cos\,\theta$

44) أوجد مساحة المنطقة المطوقة بالقلب $r=1+cos\,\theta$

45) أوجد المساحة الواقعة داخل رسم المنحنى $r=cos\,2\theta$

46) أوجد المساحة داخل رسم المعادلة $r=sin(n\,\theta)$ حيث أن n عدد صحيح موجب.

تغير المتغيرات في التكاملات الثنائية

أوجد قيمة التكاملات التالية:

47) $\int_{0}^{4}\int_{y/2}^{(y/2)+1} \frac{2x-y}{2}dx\, dy$ 48) $\iint_R (2x^2-xy-y^2)dx\, dy$

حيث أن R المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحددة بالمستقيمات

$$y=x_1\ ,\ y=x-2\ ,\ y=-2x+7\ ,\ y=-2x+4$$

(إيضاح: استخدم التعويض $u = x - y$ و $v = 2x + y$).

48) أوجد قيمة التكامل:

$$\iint_R (3x^2 + 14xy + 8y^2)dx\,dy$$

حيث أن R المنطقة الواقعة في الربع الأول ومحددة بالمستقيمات

$$y = -\frac{1}{4}x + 1\ ,\ y = -\frac{1}{4}x\ ,\ y = -\frac{3}{2}x + 3\ ,\ y = -\frac{3}{2}x + 1$$

(إيضاح: استخدم التعويض $u = 2x + 2y$ و $v = x + 4y$).

49) إذا كانت المنطقة الواقعة في الربع الأول للمستوى $x\,y$ ومحددة بالقطاعين الزائدين $xy = 1$ و $xy = 9$ والمستقيمين $y = x, y = 4x$، استخدم التعويض $x = \frac{u}{v}$ و $y = uv$ حيث أن $u > 0$ و $v > 0$ لكتابة التكامل $\iint_R \left(\sqrt{\frac{y}{y}} + \sqrt{xy}\right)dx\,dy$ كتكامل على منطقة ملائمة G في المستوى $u\,v$ ثم أوجد قيمة التكامل في المستوى $u\,v$ على المنطقة G

50) استخدم التحويل $x = u + \left(\frac{1}{2}\right)v$ و $y = v$ لإيجاد قيمة التكامل:

$$\int_0^2 \int_{y/2}^{(y+4)/2} y^3(2x - y)e^{2x-y)^2}dx\,dy$$

51) أوجد مركز كتلة المنطقة المثلثية المحددة بالمستقيمات $x = 2$ و $y = 2$ والقطاع الزائد $x\,y = 2$ في المستوى $x\,y$.

52) أوجد عزم القصور الذاتي القطبي حول نقطة الأصل لصفيحة مثلثية رقيقة كثافتها 3 ومحددة بمحور y والمستقيمين $y = 2x$ و $y = 4$ في المستوى $x\,y$

53) أوجد مركز الكتلة وعزوم القصور الذاتية وأنصاف أقطار التدوير (gyration) حول المحاور لصفيحة رقيقة (thin) محددة بالمستقيم $y = x$،

القطاع المكافئ $y = x^2$ في المستوى $x\, y$ إذا كانت دالة الكثافة $\delta(x,y) = 1$.

54) أوجد نصف قطر التدوير (radius of gyration) لكل مما يلي حول نقطة الأصل إذا كانت الكثافة 1:

أ) $x^2 + y^2 \geq 1$

ب) $x^2 + y^2 \leq 4\ ,\ y \geq 0$

جـ) $0 \leq x \leq y \leq 1$

د) $0 \leq x \leq 1\ ,\ 0 \leq y \leq 2$

55) أوجد مركز المناطق التالية إذا كانت الكثافة ثابتة:

أ) $x^2 + y^2 \leq 4\ ,\ y \geq 0$

ب) $x^2 \leq y \leq 4\ ,\ x \geq 0$

ج) $0 \leq y \leq sin\ x \qquad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

56) أوجد قيمة التكاملات التالية:

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2} dx\ dy$$

$$\int_0^1 \int_{2y}^2 4cos(x^2) dx\ dy$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{y}}^1 \frac{2\pi\ sin\ \pi x^2}{x^2} dx\ dy$$

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy\ dx}{1 + y^4}$$

الفصل الثالث

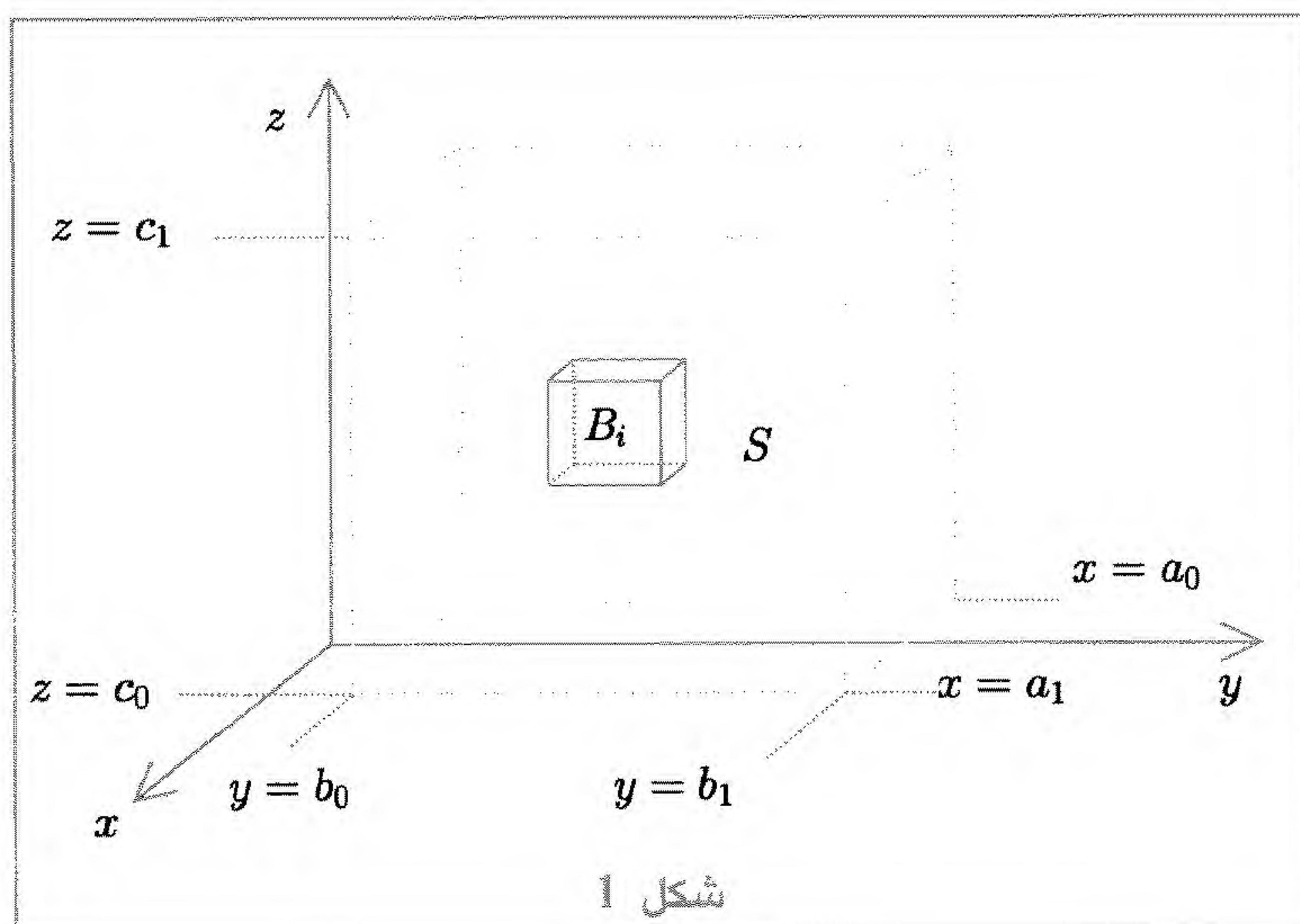
التكامل الثلاثي

3 . 1 تعريف التكامل الثلاثي

تعريف التكامل الثلاثي يوازي تعريف التكامل الثنائي، فإذا اعتبرنا متوازي السطوح المحدد بالمستويات الستة:

$$c_0 \leq z \leq c_1 \quad , \quad b_0 \leq y \leq b_1 \quad , \quad a_0 \leq x \leq a_1$$

أنظر الشكل (1).



شكل 1

وإذا كانت الدالة $f(x,y,z)$ معرّفة في المنطقة المغلقة S، فإنه بصورة مشابهة للتكامل الثنائي تقسم المنطقة المجسمة S إلى متوازيات السطوح بمستويات موازية للمستويات الإحداثية (x,y,z).

وإذا كانت $B_1, B_2, ..., B_n$ تمثل متوازيات السطوح في S، وإذا رمزنا لحجم متوازي السطوح B_i بـ $V(B_i)$ وباختيار النقطة $P_i(x_i, y_i, z_i)$ في أي مكان من B_i، فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, V(B_i)$$

يكون قيمة تقريبية للتكامل الثلاثي.

ملاحظة

اعتبرنا المنطقة S متوازي السطوح للتوضيح فقط، حيث أن R يمكن أن تكون أي منطقة محددة ومغلقة ومقياس التقسيم يساوي طول أكبر قطر من $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$، وإذا كان المجموع السابق يؤول إلى نهاية (عدد حقيقي) عندما يؤول مقياس التقسيم إلى الصفر لكل P_i (أي اختيار)، فإن النهاية تسمى تكاملاً ثلاثياً للدالة f على المنطقة S، ويرمز للتكامل الثلاثي بالرمز:

$$\iiint_S f(x,y,z)dV$$

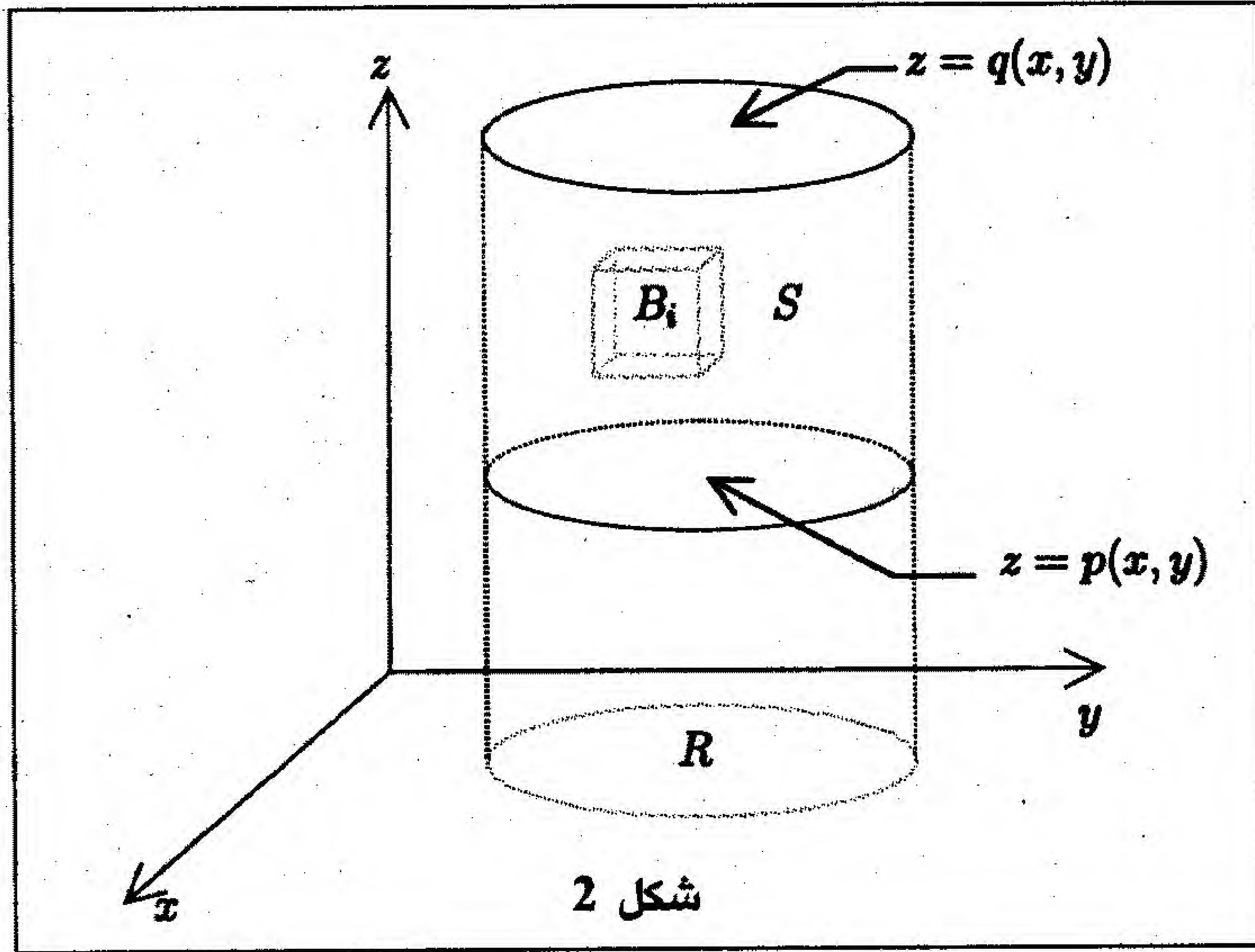
وعندما تكون المنطقة S متوازية السطوح كما سبق، فإن:

$$\iiint_S f(x,y,z)dv = \int_{a_0}^{a_1}\int_{b_0}^{b_1}\int_{c_0}^{c_1} f(x,y,z)dz\,dy\,dx$$

وإذا كانت المنطقة S محددة كما يلي:

$$p(x,y) \le z \le q(x,y) \quad , \quad b_0 \le y \le b_1 \quad , \quad a_0 \le x \le a$$

كما هو موضح في الشكل (2).



شكل 2

فإن

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dV = \int_{a_0}^{a_1}\int_{b_0}^{b_1}\int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x,y,z)dz\,dy\,dx$$

نظرية 1

نفرض أن المنطقة S معرفة بالمنحنيات التالية:

$$r_1(x,y) \le z \le r_2(x,y) \quad , \quad p(x) \le y \le q(x) \quad , \quad a \le x \le b$$

حيث أن الدوال r_2, r_1, q, p تكون متصلة.

وإذا كانت الدالة f متصلة في المنطقة S، فإن:

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dV = \int_a^b\int_{p(x)}^{q(x)}\int_{r_1(x,y)}^{r_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,dy\,dx$$

ملاحظة

إذا كانت حدود z متغيرة فإنها تكون دالة في المتغيرين x و y على الأكثر وحدود y دالة في x فقط وحدود x ثابتة حيث أن ترتيب التكامل $dz\, dy\, dx$ ويمكن اعتبار الترتيبات الأخرى بصورة مشابهة تماماً.

في الغالب يمكن تحديد حدود التكامل من الرسم التخطيطي بصورة مشابهة للتكامل الثنائي، كما سيتضح من الأمثلة التي سنقدمها في هذا الفصل.

وبما أن التكامل المحدد للدالة في متغير واحد يفسر بالمساحة والتكامل الثنائي بالحجم فمن المتوقع تفسير التكامل الثلاثي بما فوق الحجم أو الحجم الزائد (Hypervolume) أو الحجم في أربعة أبعاد. وعلى الرغم من بعض الأهمية للتفسيرات السابقة فإنه من الأهمية اعتبار الحالات الآتية:

1) الكتلة (Mass)

إذا كانت الدالة $\rho(x, y, z)$ تمثل الكثافة على وحدة الحجم، فإن:

$$M(S) = \iiint\limits_{S} \rho(x, y, z)dV$$

2) الحجم (Volume)

إذا كانت $f(x, y, z) = 1$، فإن:

$$V(S) = \iiint\limits_{S} dV$$

3) عزم المجسم S بالسنبة للمستويات x y، x z، y z يعرف كما يأتي:

$$M_{xz} = \iiint\limits_{S} y\ \rho(x, y, z)dV\ ,\ M_{xy} = \iiint\limits_{S} z\ \rho(x, y, z)dV$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_{S} x\ \rho(x, y, z) dV$$

حيث أن $\rho(x, y, z)$ تمثل كثافة المجسم S.

4) مركز الكتلة هو النقطة (x, y, z)

حيث أن:

$$x = \frac{M_{yz}}{M}\ ,\ y = \frac{M_{xz}}{M}\ ,\ z = \frac{M_{xy}}{M}$$

5) عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحاور z, y, x

$$I_y = \iiint\limits_{S} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV\ ,\ I_x = \iiint\limits_{S} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dV$$

$$I_z = \iiint\limits_{S} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV$$

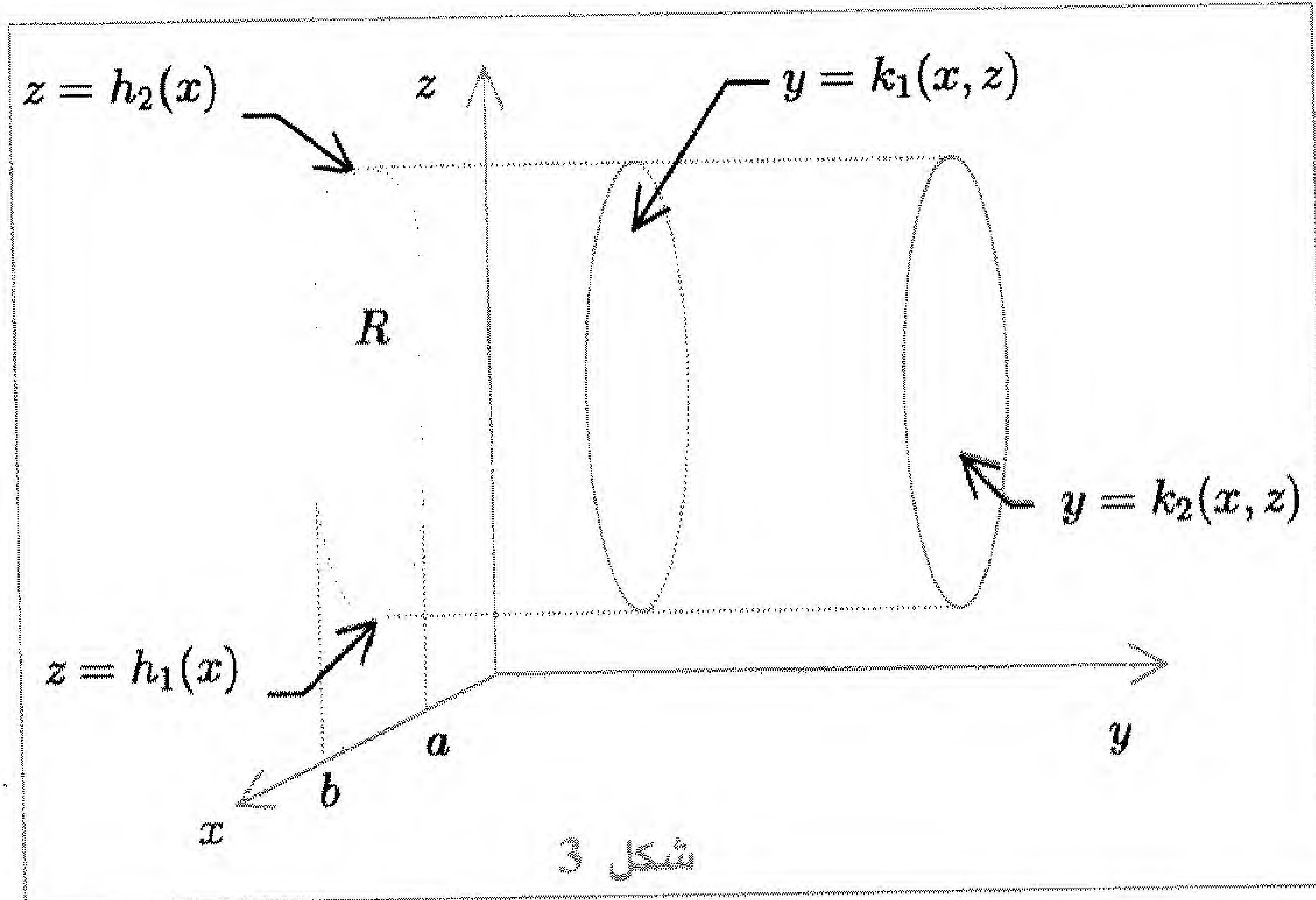
حيث أن $\rho(x, y, z)$ تمثل كثافة المجسم S.

2.3 تغيير ترتيب التكامل

رأينا أهمية ترتيب التكامل الثنائي، حين يتعذر في بعض المسائل إجراء عملية التكامل، كذلك الحال في التكامل الثلاثي يكون للترتيب أهمية كبيرة. فإذا كانت المنطقة S كما يلي:

$$S = \{(x,y,z) : a \leq x \leq b \ , \ h_1(x) \leq z \leq h_2(x) \ , \ k_1(x,z) \leq y \leq k_2(x,z)\}$$

أنظر الشكل (3).



شكل 3

فإن تكامل الدالة على المنطقة S يمكن كتابته كما يأتي:

$$\iiint\limits_S f(x,y,z)dV = \int\limits_a^b \int\limits_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int\limits_{k_1(x,z)}^{k_2(x,z)} f(x,y,z)dy\,dz\,dx$$

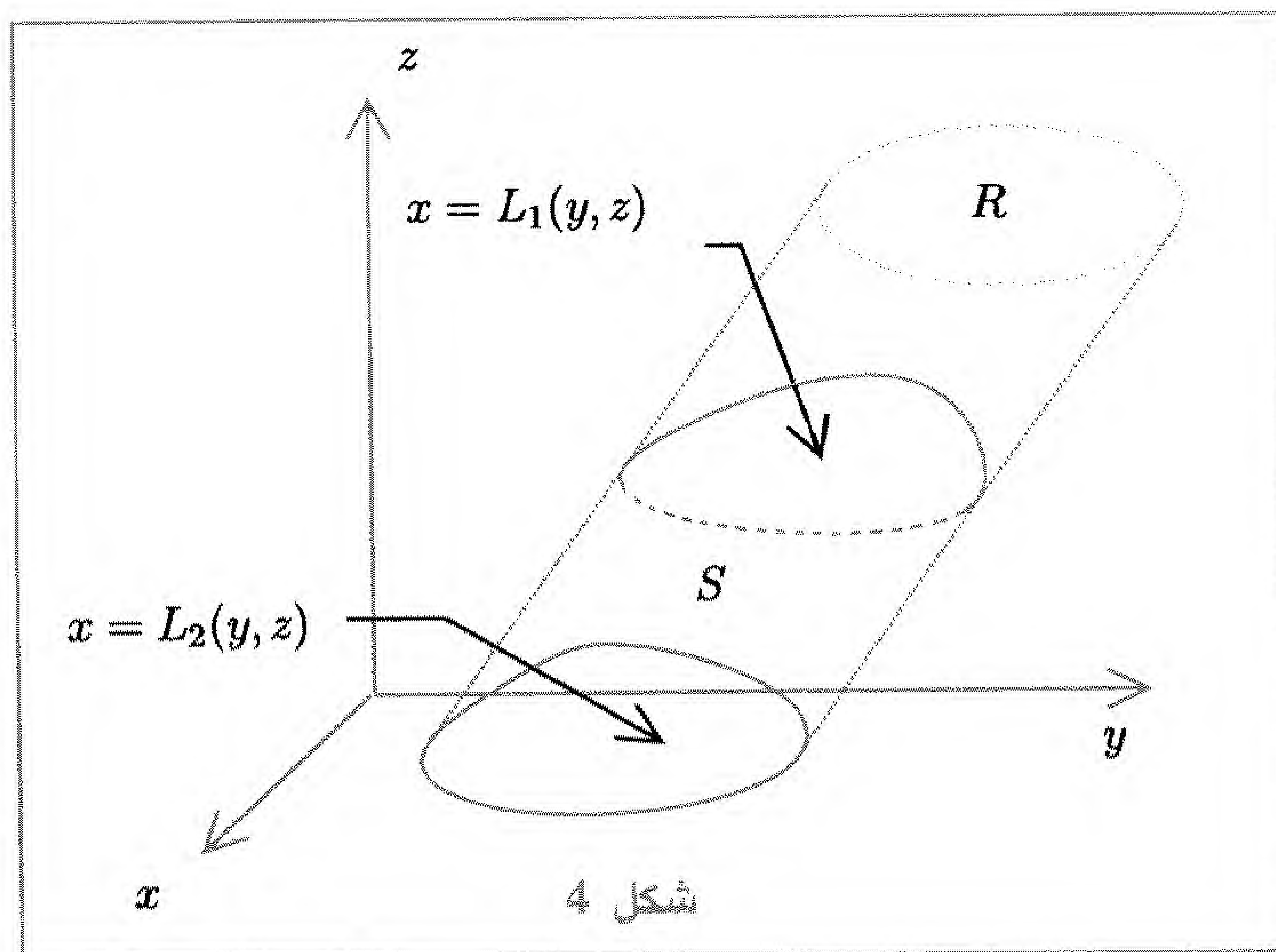
والصورة الأخيرة يمكن تفسيرها بأخذ نهاية مجموع صف من متوازيات السطوح الموازية لمحور y من السطح الأيسر $(y = k_1(x,z))$ إلى السطح الأيمن $(y = k_2(x,z))$ ثم تكامل الدالة المكاملة (Integrand) على المنطقة R في المستوى $x\ z$.

وأخيراً إذا كانت المنطقة S على الصورة التالية:

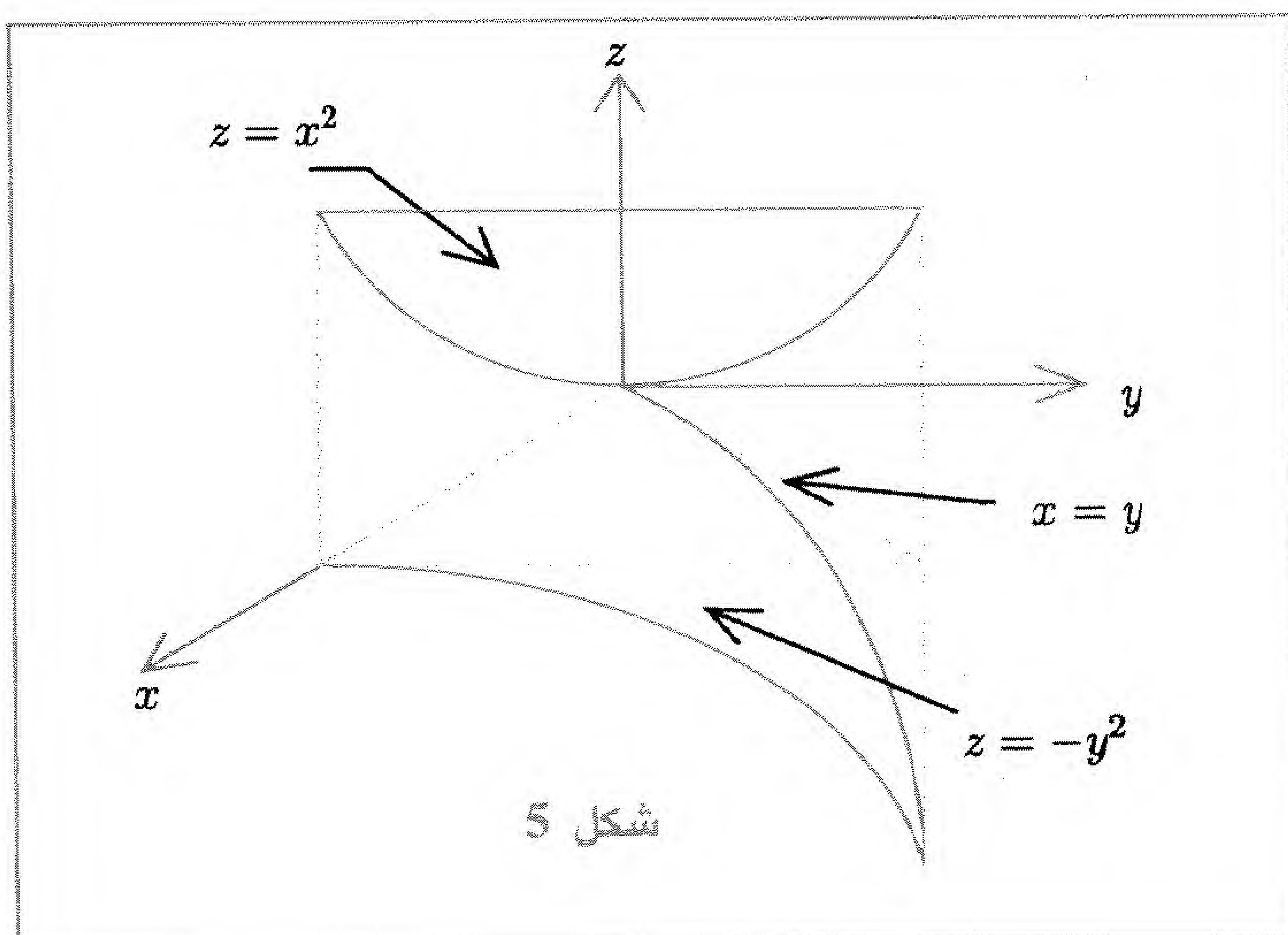
$$S = (x,y,z) : c_1 \leq z \leq c_2 \ , \ r_1(z) \leq z \leq r_2(z) \ , \ L_1(y,z) \leq x \leq L_2(y,z)\}$$

فإن التكامل الثلاثي للدالة f يكتب كما يأتي:

$$\iiint_S f(x,y,z)dV = \int_{c_1}^{c_2} \int_{r_1(z)}^{r_2(z)} \int_{L_1(y,z)}^{L_2(y,z)} f(x,y,z)dx\ dy\ dz$$



شكل 4



شكل 5

مثـــال 1

أوجد قيمة التكامل $I = \iiint\limits_S (x^2 - y^2)dv$

حيث أن S المجسم بين السطحين $z = -y^2$ و $z = x^2$ لكل $(x,y) \in R$ و R في المستوى $x\,y$ حيث أن $y = 0$ و $y = x$ و $0 \leq x \leq 1$.

الحـــل

من الشكل (5) يمكن كتابة حدود التكامل كما يأتي:

$$I = \int_0^1 \int_0^x \int_{-y^2}^{x^2} (x^2 - y^2)dz\, dy\, dx$$

ولإيجاد قيمة التكامل الثلاثي نعتبر أولاً المتغيرين y و x ثابتين ونكامل بالنسبة للمتغير z أي أن:

$$I = \int_0^1 \int_0^x (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)dy\, dx$$

والخطوة الثانية نكامل بالنسبة للمتغير y ونعتبر x ثابتاً:

$$I = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{5}x^5\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{5}x^2\right)dx$$

$$= \frac{4}{30}x^6\Big|_0^1 = \frac{2}{15}$$

مثـــال 2

أوجد قيمة التكامل

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{sinz} x^2 sin\, y\, dx\, dy\, dz$$

وارسم المجسم S.

الحــل

$$I=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3\ siny\Big|_0^{sin\ z}\ dy\ dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3z\ sin\ y\ dy\ dz$$

$$I=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3\ z\ cos\ y\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dz$$

$$I=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3\ z\ dz$$

يمكن كتابة التكامل السابق كما يلي:

$$I=-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos^2z)d\ cos\ z$$

وبعد إجراء التكامل بالنسبة لـ $cos\ z$:

$$I=-\frac{1}{3}\left(cos\ z-\frac{1}{3}cos^3z\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\frac{1}{3}\left[0-\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{2}{9}$$

ويترك رسم المجسم كتمرين للقارئ.

مثــال 3

أوجد قيمة التكامل

$$\iiint_S ye^{xy}dV$$

حيث أن S المكعب المحدد بالمستويات التالية:

$z=0$ و $z=-2$, $y=2$ $y=0$, $x=3$ $x=1$

الحـــل

$$\iiint\limits_S ye^{xy}dV = \int_0^2 \int_1^3 \int_{-2}^0 ye^{xy}dz\ dx\ dy$$

$$= 2\int_0^2 \int_1^3 ye^{xy}dx\ dy$$

$$= \int_0^2 (e^{3y} - e^{y})dy$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{2}{3}e^6 - 2e^2$$

ملاحظة

يمكن إيجاد التكامل السابق بتغيير ترتيب التكامل (خمس صور مختلفة) ويمكن للقارئ محاولة ذلك علماً بأن النتيجة مطابقة.

مثـــال 4

أوجد قيمة التكامل الثلاثي $\iiint\limits_S x\ dz\ dy\ dx$

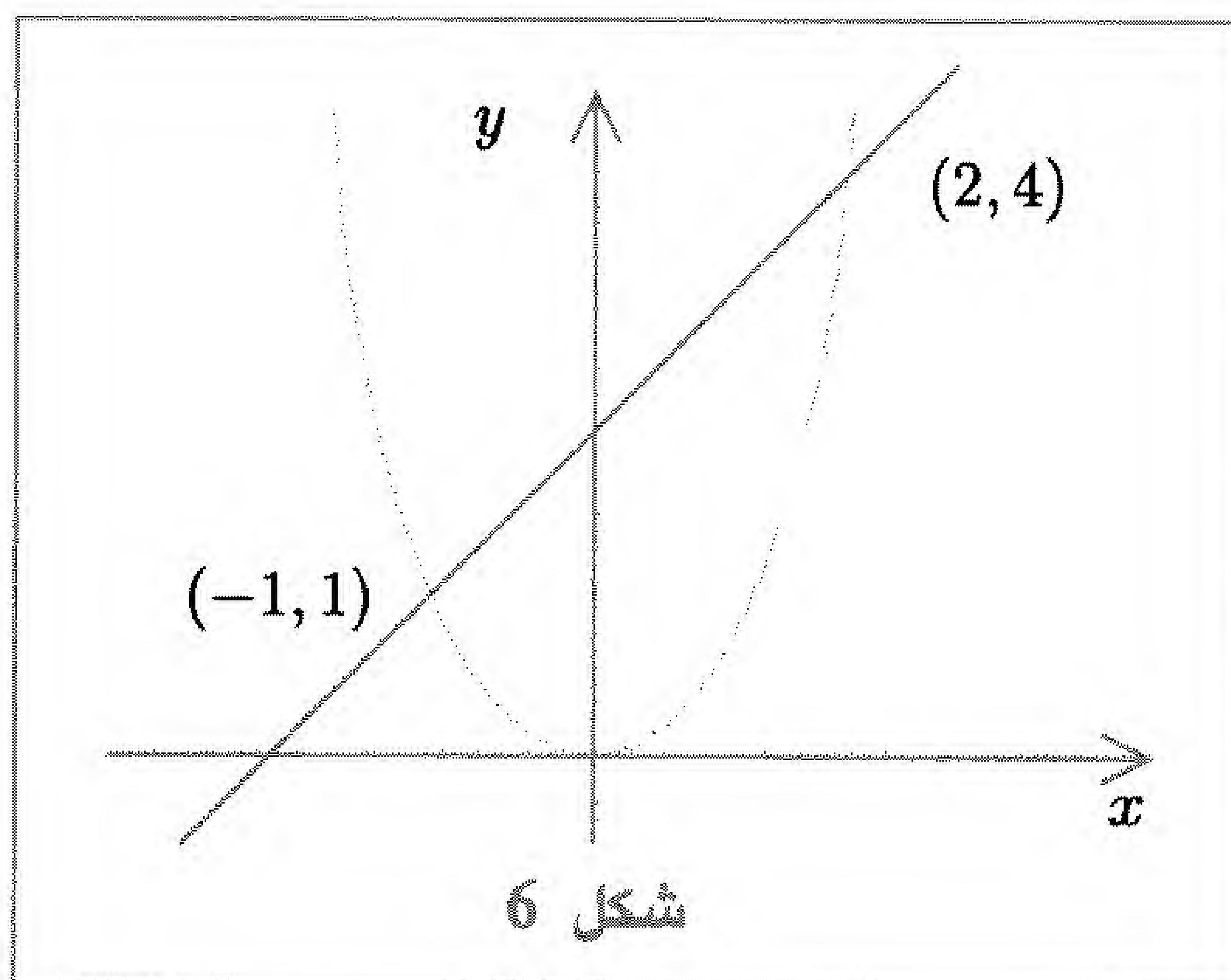
حيث أن S المنطقة المحددة بالسطوح التالية:

$z = x + 3$ و $4z = x^2 + y^2$ $y = 2 + x$, $y = x^2$

الحـــل

لمعرفة حدود التكامل نرسم مسقط المجسم S في المستوى $x\,y$، وهو عبارة عن المنطقة الواقعة بين المنحنى $y = x^2$ والمستقيم $y = x + 2$ كما هو موضح بالرسم، وبأخذ أي نقطة من السهل معرفة أن المجسم S محدد من أسفل

بـ $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)$ ومن أعلى بـ $z=x+3$



شكل 6

وهكذا
$$I=\iiint\limits_S x\ dv=\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2}\int_{\frac{1}{4}(x^2+y^2)}^{x+3} x\ dz\ dy\ dx$$

وعند إجراء عملية التكامل نعتبر y و x ثابتين ونكامل بالنسبة للمتغير z في البداية أي أن:

$$I=\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2}\left[x(x+3)-\frac{x}{4}(x^2+y^2)\right]dy\ dx$$

وعملية التكامل بسيطة ومن السهل أن يبين القارئ أن قيمة هذا التكامل تكون 5.23

مثـــال 5

أوجد قيمة التكامل الثلاثي

$$I=\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-z^2}}\int_{0}^{2-z} z\ dx\ dy\ dz$$

الحــل

أولاً نعتبر المتغيرين y و z ثابتين ونكامل بالنسبة للمتغير x

$$I=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}}(x\ z)\Big|_0^{2-z}dy\ dz=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-z^2}}(2z-z^2)dy\ d$$

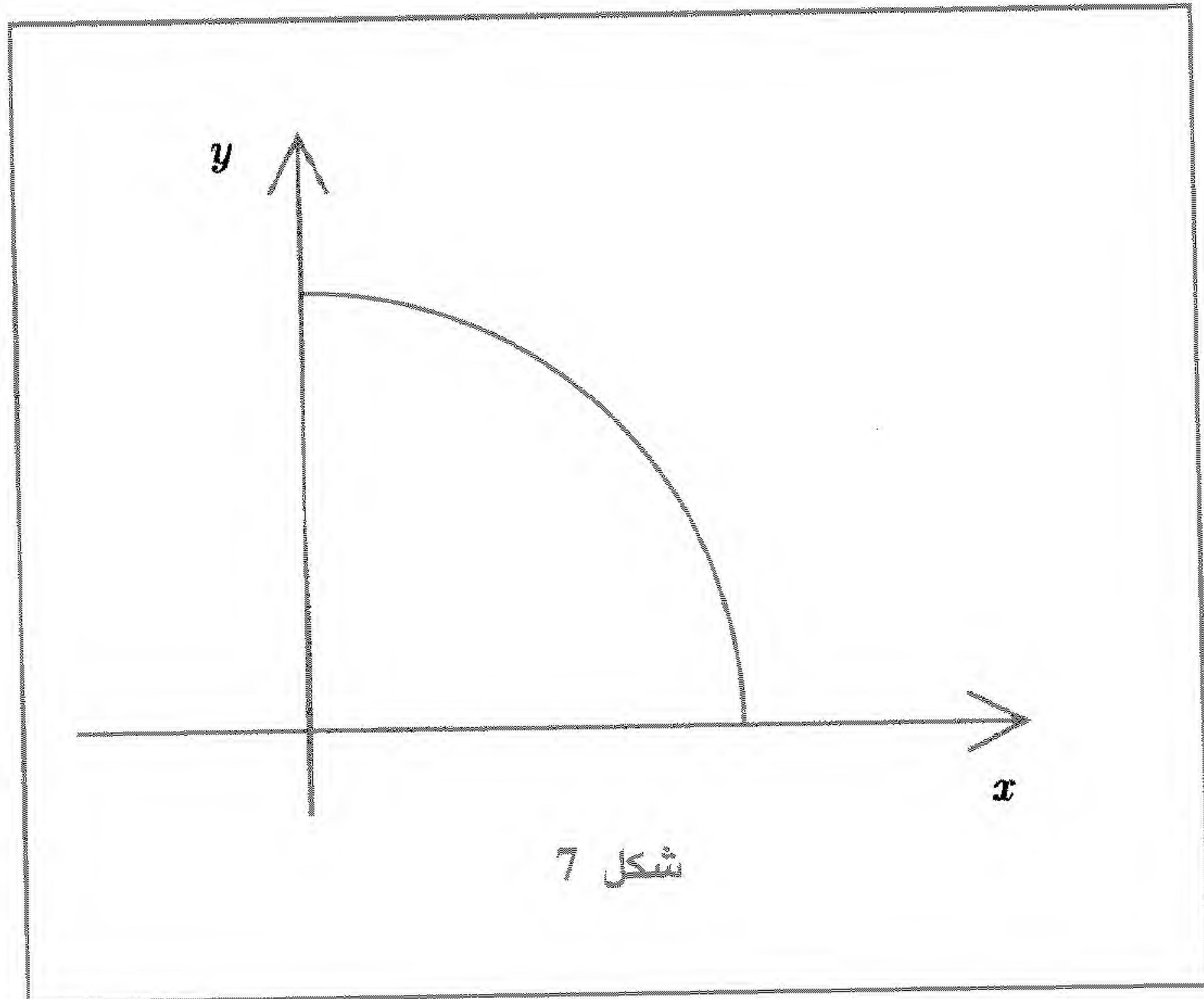
والآن نعتبر z ثابتاً ونكامل بالنسبة للمتغير y، ولتبسيط عملية التكامل نستخدم الإحداثيات القطبية، ولذلك:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2(2rcos\theta-r^2cos^2\theta)r\ dr\ d\theta$$

وبالتكامل بالنسبة لـ r نجد أن:

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{3}r^3cos\theta-\frac{1}{4}r^4cos^2\theta\right)\Big|_0^2 d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{16}{3}cos\ \theta-4cos^2\theta\right)d\theta$$



شكل 7

وباستخدام المتطابقة $cos^2\theta = \frac{1}{2}(cos2\theta + 1)$ نجد أن:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{16}{3} cos\ \theta - 2cos\ 2\theta - 2\right) d\theta$$

$$= \left(\frac{16}{3} sin\ \theta - sin\ 2\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{16}{3} - 0 - \pi\right) = \frac{16 - 3\pi}{3}$$

مثــال 6

أوجد الحجم الواقع بين السطحين

$$z = 8 - x^2 - y^2 \quad , \quad z = x^2 + 3y^2$$

الحــل

السطحان يتقاطعان عند الأسطوانة التي قاعدتها قطع ناقص في المستوى $x\ y$

$$8 - x^2 - y^2 = x^2 + 3y^2$$

أو

$$x^2 + 2y^2 = 4 \Longrightarrow x \pm \sqrt{4 - 2y^2}$$

وعندما $x = 0$ فإن $y = \pm\sqrt{2}$

ولذلك

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\ dx\ dy$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} (8 - 2x^2 - 4y^2) dx\ dy$$

وبإجراء عملية التكامل بالنسبة للمتغير x (y ثابت) يمكن أن نبين أن:

$$V = \frac{8}{3} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - 2y^2)^{\frac{3}{2}}\, dy$$

وباستخدام التعويض $y = \sqrt{2}\, sin\, \theta$، وهذا يتضمن $dy = \sqrt{2}\, cos\theta d\theta$، نجد أن:

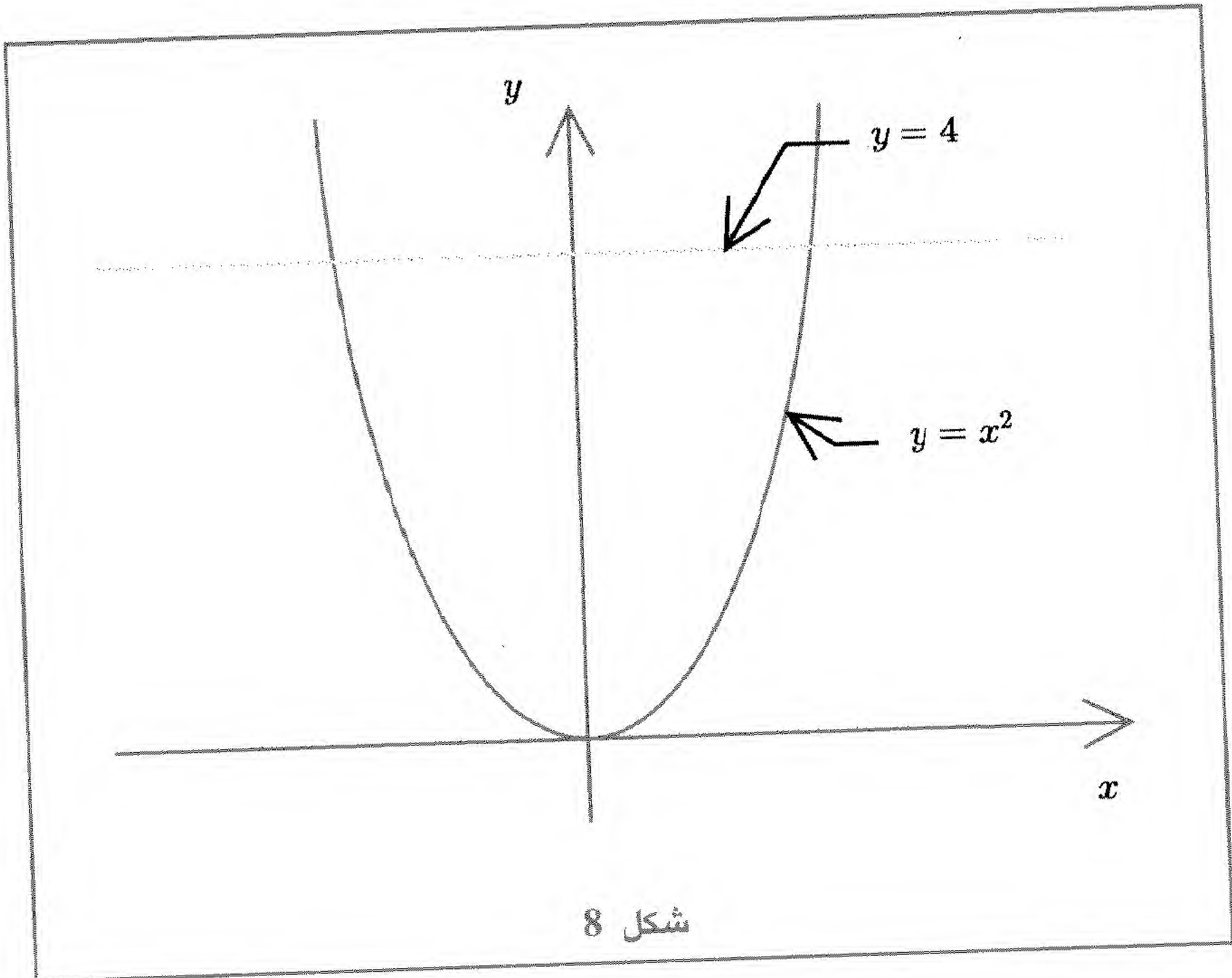
$$V = \frac{64\sqrt{2}}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^4\theta\, d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (cos\, 2\theta + 1)^2 d\theta$$

ويمكن كتابة التكامل الأخير على الصورة التالية:

$$= \frac{16\sqrt{2}}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2cos 2\theta + \frac{1}{2}(cos\, 4\theta + 1\right)\, d\theta$$

وبعد إجراء التكامل نجد أن:

$$V = \frac{16\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2}\pi = 8\sqrt{2}\, \pi = 35.54306351$$



شكل 8

مثــال 7

أوجد حجم المجسم المحدد بالأسطوانة $y = x^2$ والمستويين $y + z = 4$ ، $z = 0$

الحــل

لتحديد حدود التكامل، نرسم مسقط المجسم في المستوى $x\,y$، انظر الشكل (8).

واضح أن المستوى $y + z = 4$ فوق المستوى $z = 0$ (المستوى $x\,y$).

ولذلك

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{4-y} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}(4-y)dy\,dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(4y - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{x^2}^{4} dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(8 - 4x^2 + \frac{1}{2}x^4\right)dx$$

$$= 8x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5\Big|_{-2}^{2}$$

$$= 32 - \frac{64}{3} + \frac{64}{10} = 17.067$$

مثــال 8

إذا كانت المنطقة Ω معرفة كما يلي:

$$\Omega = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1 \ , \ x^2 \le y \le x \ , \ x - y \le z \le x + y\}$$

فأوجد ما يأتي:

أ) حجم المنطقة Ω

ب) $\displaystyle\iiint_{\Omega} 2x^3y^2z \, dV$

ج) الكتلة الكلية

د) مركز الكتلة

إذا كانت الكثافة $\rho(x,y,z) = x + 2y + 4z$

الحـل

أ) يمكن إيجاد الحجم V كما يلي:

$$V = \iiint_{\Omega} dV$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{2} \int_{x-y}^{x+y} dz \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 2y \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - x^4) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

ب)

$$\iiint_{\Omega} 2x^3y^2z \, dV = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \int_{x-y}^{x+y} 2x^3y^2z \, dz \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x^3y^2\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right]dy\ dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x^3y^2[(2x)(2y)]dy\ dx$$ (لماذا؟)

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} 4x^4y^3\ dy\ dx$$

$$= \int_0^1 x^4y^4\Big|_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 x^4\left[x^4 - x^8\right]dx$$

$$\int_0^1 (x^8 - x^{12})dx$$

$$= \left(\frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{13}x^{13}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{9} - \frac{1}{13} = \frac{4}{117}$$

جـ) الكتلة الكلية يمكن إيجادها كما يلي:

$$M = \iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)dV$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \int_{x-y}^{x+y} (x+2y+4z)dz\ dy\ dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} [(x+y)(2y) + 2(4xy)]dy\ dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} [10xy + 4y^2]dy\ dx$$

$$= \int_0^1 \left[5xy^2 + \frac{4}{3}y^3\right]\Bigg|_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[\left(5x^3 + \frac{4}{3}x^3\right) - \left(5x^5 + \frac{4}{3}x^6\right)\right]dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{19}{3}x^3 - 5x^5 - \frac{4}{3}x^6\right)dx$$

$$= \left(\frac{19}{12}x^4 - \frac{5}{6}x^6 - \frac{4}{21}x^7\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{19}{12} - \frac{5}{6} - \frac{4}{21} = \frac{133 - 70 - 16}{84} = \frac{47}{84} = 0.5595$$

د) عزم المجسم Ω بالنسبة للمستوى $x\ y$ يمكن إيجاده كما يلي:

$$M_{xy} = \iiint_{\Omega} z\ \rho(x, y, z)dv$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \int_{x-y}^{x+y} z(x + 2y + 4z)dz\ dy\ dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \left[(x + 2y)\frac{z^2}{2} + \frac{4}{3}z^3\right]_{x-y}^{x+y} dy\ dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \left[(x + 2y)(2xy) + \frac{4}{3}(6x^2y + 2y^3)\right]dy\ dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \left(10x^2y + 4xy^2 + \frac{8}{3}y^3\right) dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[5x^2y^2 + \frac{4}{3}xy^3 + \frac{2}{3}y^4\right]_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[5x^2(x^2 - x^4) + \frac{4}{3}x(x^3 - x^6) + \frac{2}{3}y^4\right]_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[5x^2(x^2 - x^4) + \frac{4}{3}x(x^3 - x^6) + \frac{2}{3}(x^4 - x^8)\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left(5x^4 - 5x^6 + \frac{4}{3}x^4 - \frac{4}{3}x^7 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^8\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(7x^4 - 5x^6 - \frac{4}{3}x^7 - \frac{2}{3}x^8\right) dx$$

$$= \left(\frac{7}{5}x^5 - \frac{5}{7}x^7 - \frac{4}{24}x^8 - \frac{2}{27}x^9\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{7}{5} - \frac{5}{7} - \frac{1}{6} - \frac{2}{27} = \frac{841}{1890} = 0.4449735$$

ولكن مركز الكتلة

$$(x, y, z) = \left(\frac{M_{yz}}{M}\ ,\ \frac{M_{xz}}{M}\ ,\ \frac{M_{xy}}{M}\right)$$

ومنها

$$z = \frac{0.44497}{0.5595} = 0.795299 = 0.795$$

ويترك للقارئ كتمرين أن يبين :

$$(x, y, z) = (0.689, 0.606, 0.795)$$

تمارين 2.3

أوجد قيمة التكاملات الآتية:

1) $$\int_0^3\int_{-1}^1\int_2^4 (y-xz)dz\,dy\,dx$$

2) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\cos z\,dy\,dx\,dz$$

3) $$\int_{-15}^{13}\int_1^e\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} z(\ln x)^2 dz\,dx\,dy$$

4) $$\int_{-1}^2\int_1^{x^2}\int_0^{x+y} 2x^2\,y\,dz\,dy\,dx$$

أرسم المنطقة S المحددة بالمعادلات المعطاة وعبّر عن التكامل:

$$\iiint_S f(x,y,z)dV$$

كتكامل جزئي بست صور مختلفة في التمارين من 5 ـ 7:

5) $x+2y+3z=6$, $x=0$, $y=0$, $z=0$

6) $x^2+y^2=9$, $z=0$, $z=2$

7) $36x^2+9y^2+4z^2=36$

أوجد قيمة التكامل $\iiint_S f(x,y,z)dV$

حيث أن S محدد بالسطوح المعطاة وf الدالة المعطاة في التمارين من 8ـ11:

8) $z=0$, $x^3+z=1$, $y^2+z=1$, $f(x,y,z)=x$

9) $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$, $f(x,y,z)=x^2+y^2$

10) $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$, $f(x,y,z)=z$

11) $y^2+z^2=4ax$, $y^2=ax$, $x=3a$, $f(x,y,z)=x^2$

وفي المسائل من 12 ـ 15 أوجد مركز كتلة المجسم حيث أن S محددة بالسطوح المعطاة و δ تمثل الكثافة:

12) $x=0$, $y=0$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $\delta =$ مقدار ثابت

13) $x \geq 0$: $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$, $\delta =$ مقدار ثابت

14) $z^2=x^2+y^2$, $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, $\delta = k\sqrt{x^2+y^2}$

حيث أن $x \geq 0$.

15) $z^2=4ax$, $x^2+y^2=2ax$, $\delta =$ مقدار ثابت

استخدم التكامل الثلاثي لإيجاد الحجم في المسائل (16 ـ 19)

16) الحجم بين الأسطوانة $z=y^2$ والمستوى $x\,y$ والمحدد بالمستويات الأربعة الرأسية التالية: $x=0$, $y=-1$, $y=1$.

17) الحجم الواقع بين الأسطوانة $y^2+4z^2=16$ والمستويين $x=0$ و$x+y=4$

18) الحجم الواقع بين السطحين $z=x^2+9y^2$ و $z=18-x^2-9y^2$

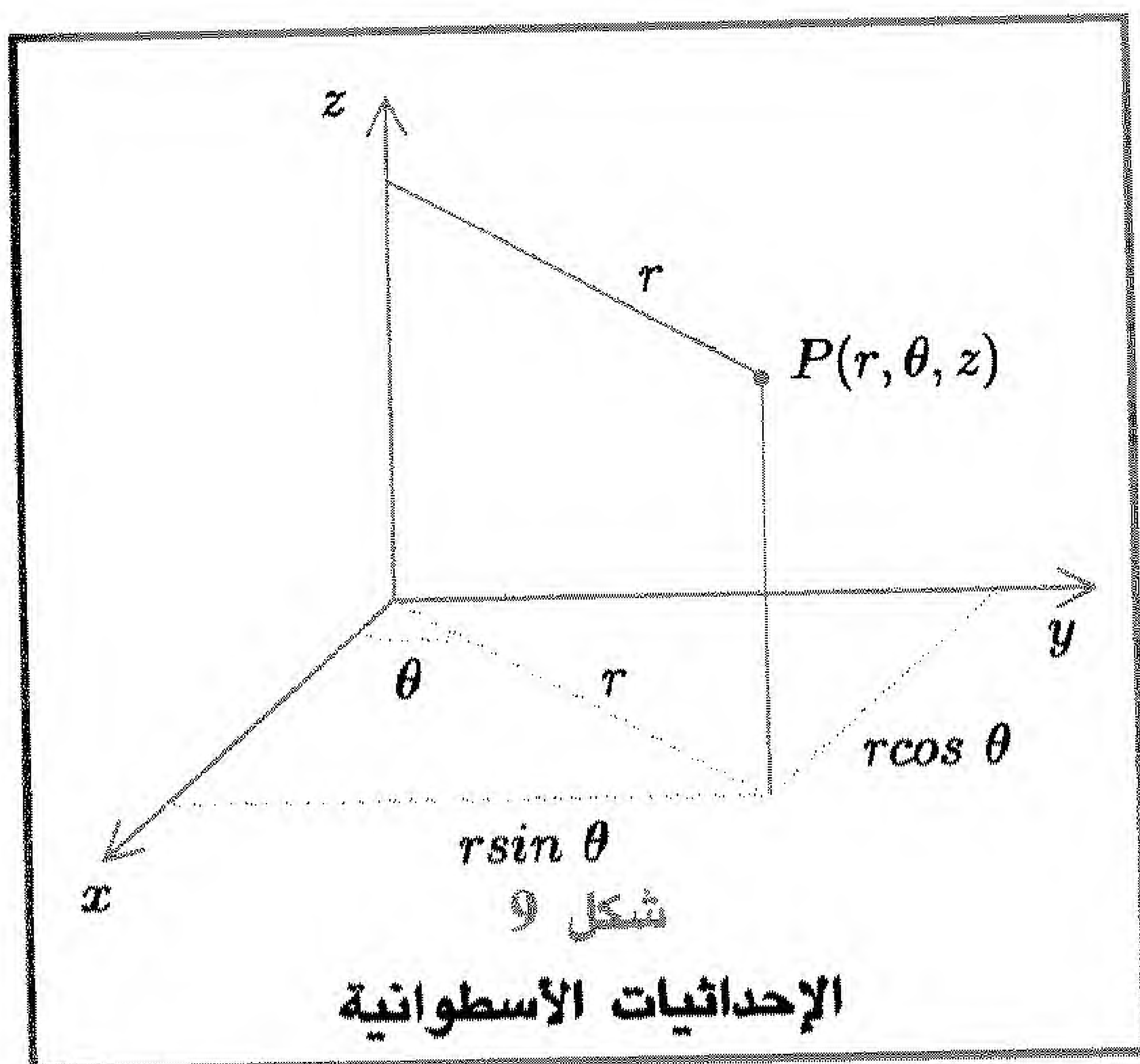
19) الحجم المشترك بين الأسطوانتين $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+z^2=a^2$

3.3 الإحداثيات الأسطوانة والتكامل الثلاثي

كثير من المسائل في ثلاثة أبعاد يمكن التعامل معها باستخدام الإحداثيات الأسطوانية وسنناقش الآن نظام الإحداثيات الأسطوانية.

الإحداثيات الأسطوانية

في هذا النظام النقطة P تحدد بالإحداثيات القطبية (r,θ) في المستوى $x\,y$ والمسافة الأفقية الإتجاهية z من المستوى $x\,y$ انظر الشكل 9.



شكل 9
الإحداثيات الأسطوانية

حيث أن $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ لكل نقطة ليست على محور z لها تمثيل وحيد أو مفرد (r,θ,z) .

العلاقة بين الإحداثيات الأسطوانية والمستطيلة:

تحدد العلاقة من نظامي المعادلات التالية:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta \qquad (1)$$
$$z = z$$

أو

$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} \qquad (2)$$
$$z = z$$

وموقع الزاوية θ يحدد من إشارتي x و y

والتكامل الثلاثي يمكن التعامل معه بسهولة باستخدام الإحداثيات الأسطوانية وخاصة عندما يظهر التعبير (x^2+y^2) في الدالة المكاملة أو حدود التكامل والمنطقة R يمكن التعبير عنها بسهولة باستخدام الإحداثيات القطبية.

والنظرية 3 في الفصل الثاني البند الرابع يمكن تعميمها إلى التكامل الثلاثي والعلاقة التي تربط بين التكامل الثلاثي بالإحداثيات المستطيلة (x, y, z) والإحداثيات الأسطوانية تكتب على الصورة التالية:

$$\iiint\limits_{S_{xyz}} f(x, yz)dV = \iiint\limits_{S_{r\theta z}} f(r\ cos\ \theta, r\ sin\ \theta, z)\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)}\right| dr\ d\theta\ dz$$

حيث أن الجاكوبي $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = r$ (راجع الفصل الأول).

مثـــال 1

أوجد $\iiint\limits_{S} \sqrt{x^2+y^2}dV$

حيث أن S المجسم المحدد من أعلى بالمستوى $y+z=4$، ومن أسفل بالمستوى $x\ y$ ومن الجوانب بالأسطوانة $x^2+y^2=16$.

الحـــل

لاحظ أن المنطقة R في المستوى $x\ y$ عبارة عن دائرة نصف قطرها 4 أي أن $r=4$ و $0 \le \theta \le 2\pi$

ولذلك

$$\iiint_S \sqrt{x^2+y^2}dv = \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_0^{4-r\sin\theta} (r)(r\ dz\ dr\ d\theta)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^4 r^2 z\Big|_0^{4-r\sin\theta} dr\ d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^4 r^2(4-r\ \sin\ \theta)dr\ d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{4}{3}r^3-\frac{1}{4}r^4\sin\ \theta\right)\Big|_0^4 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{256}{3}-64\sin\ \theta\right)d\theta$$

$$= \left(\frac{256}{3}\theta+64\cos\ \theta\right)_0^{2\pi} = \frac{512}{3}\pi = 536.165$$

مثـال 2

أوجد $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{(x^2+y^2)^2}^{1} x^2\ dz\ dy\ dx$

الحـل

حدود التكامل في التكامل الأول والثاني من اليسار تبين بأن المنطقة R في المستوى $x\ y$ هي دائرة نصف قطرها 1 أي $r=1$ ولذلك

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{(x^2+y^2)^2}^{1} x^2 dz\ dy\ dx = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^4}^{1} r^3\cos^2\theta dz\ dr\ d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^3\cos^2\ \theta)z\Big|_{r^4}^{1} dr\ d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 cos^2\theta (1-r^4) dr\ d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} r^4 cos^2\theta - \frac{1}{8} r^8 cos^2\theta \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} cos^2\theta\ d\theta$$

$$= \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} (cos\ 2\theta + 1) d\theta$$

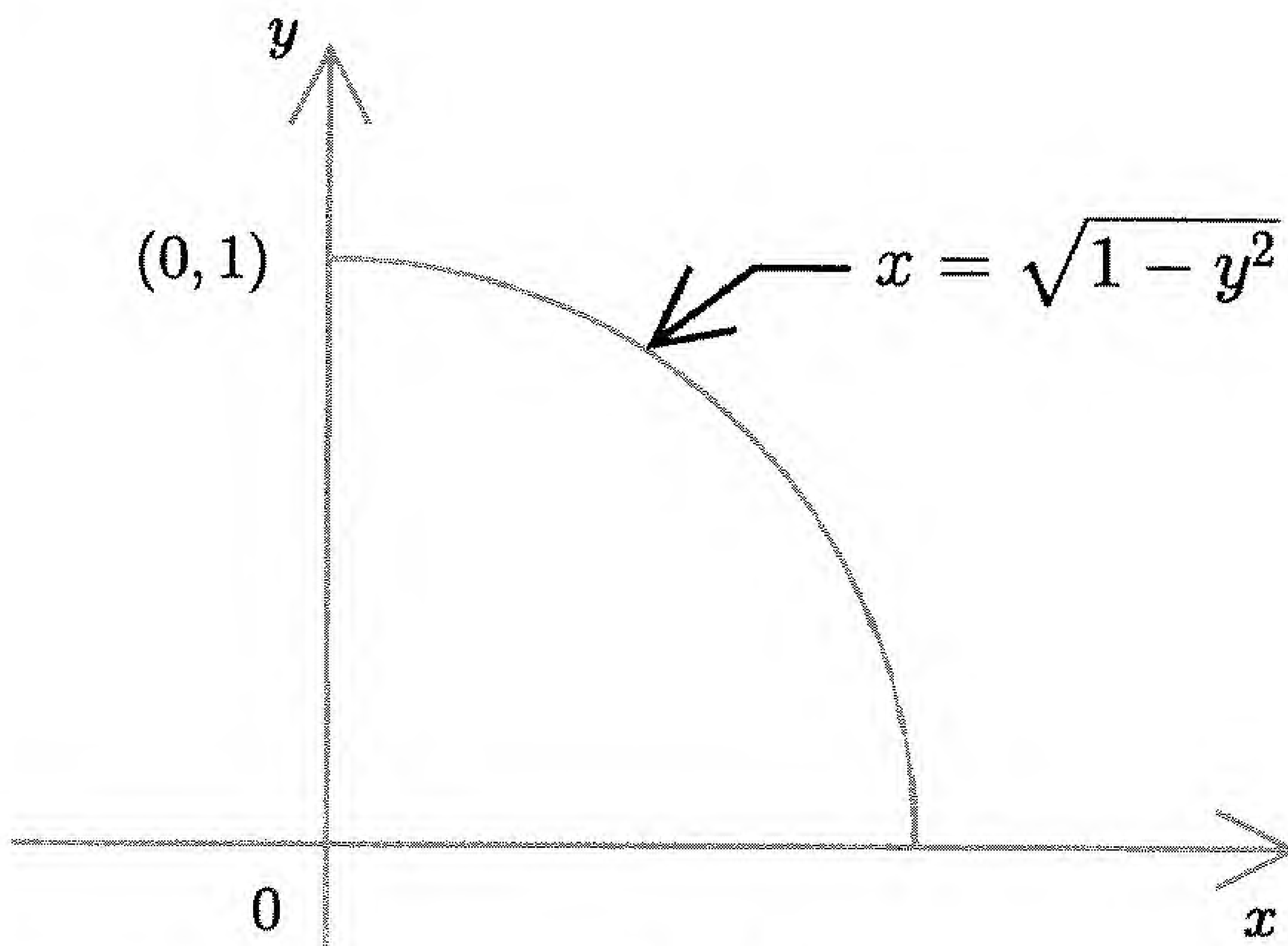
$$= \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2} sin\ 2\theta + \theta \right) \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1}{16}(2\pi) = \frac{\pi}{8}$$

مثـــال 3

أوجد $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\ dz\ dx\ dy$

الحـــل

المنطقة R في المستوى $x\ y$ عبارة عن ربع دائرة كما هو موضح بالشكل (10).



شكل 10

ولذلك

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\, dz\, dx\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r\, z\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{r}{2}(4-r^2) dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r^2 - \frac{1}{8} r^4 \right) \Big|_0^1 d\theta$$

$$= \frac{7}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{7\pi}{16}$$

مثال 4

أوجد كتلة المجسم المحدد بالأسطوانة $x^2 + y^2 = ax$ والمخروط $z^2 = x^2 + y^2$ إذا كانت الكثافة $\rho = k\sqrt{x^2+y^2}$.

الحل

معادلة الأسطوانة بالإحداثيات الأسطوانية هي $r^2 = ar\ cos\theta$ أو $r = a\ cos\theta$

ومعادلة المخروط هي $z^2 = r^2$

ومعادلة الكثافة هي $\rho = k\, r$

واضح أن المنطقة R في المستوى $x\,y$ عبارة عن دائرة مركزها $\left(\frac{1}{2}a, 0\right)$ ونصف قطرها $\frac{a}{2}$ أي تقع في الربع الأول والرابع.

ولذلك

$$M(S) = \iiint_S k\sqrt{x^2+y^2} dA = k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\cos\theta} \int_{-r}^{r} r^2\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= 2k \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{a\,cos\theta} r^3\ dr\ d\theta$$

$$= \frac{1}{2} k\ a^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^4\theta\ d\theta$$

ملاحظة

$$cos\ 2\theta = cos^2\theta - sin^2\theta = 2\ cos^2\theta - 1$$

أو

$$cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + cos\ 2\theta)$$

وهذا يتضمن:

$$cos^4\theta = \frac{1}{4}(1 + 2\ cos\ 2\theta + cos^2\ 2\theta)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2cos\ 2\theta + \frac{1 + cos4\theta}{2}\right)$$

وهكذا فإن

$$M(S) = \frac{1}{8} ka^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2cos2\theta + \frac{1 + cos4\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{8} ka^4 \left[\theta + sin\ 2\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{8} sin\ 4\theta\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{8} ka^4 \left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3k\pi a^4}{16}$$

تمارين 3.3

أوجد قيمة التكاملات الآتية:

1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_1^{2}\int_0^{5} e^z\, r\, dz\, dr\, d\theta$

2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{1-r^2}} r\, sin\theta\, dz\, dr\, d\theta$

3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\int_0^{2\, sin\theta}\int_0^{r^2} r^2 cos\theta\, dz\, dr\, d\theta$

4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{1+cos\theta}\int_0^{r} dz\, dr\, d\theta$

عبّر عن التكاملات الثلاثية التالية بالإحداثيات الأسطوانة وأوجد قيمة كل منها:

5) $\displaystyle\iiint_S (x^2+y^2)dV$ حيث أن S المنطقة المجسمة المحددة بالأسطوانة $x^2+y^2=1$ والمستويين $z=0$ و $z=4$

6) $\displaystyle\iiint_S z\, dV$ حيث أن S جزء الكرة $x^2+y^2+z^2 \le 1$ الواقع في الثمن الأول.

7) $\displaystyle\iiint_S x\, z\, dV$ حيث أن S الكرة $x^2+y^2+z^2 \le 4$.

أوجد حجم المنطقة المعطاة في الحالات التالية:

8) المنطقة المجسمة داخل المخروط $z=r$ وبين المستويين $z=1$ و $z=2$

9) المنطقة المجسمة المحددة من أسفل بالسطح $z=\sqrt{r}$ ومن أعلى بالمستوى $z=1$

10) المجسم المحدد من أعلى بالكرة $x^2+y^2+z^2=2$ ومن أسفل بالمجسم المكافئ الدائري $z=x^2+y^2$

11) المجسم المحدد من أعلى بالسطح $z = e^{-x^2-y^2}$ ومن أسفل بالمستوى $x\,y$ ومن الجوانب بالأسطوانة $x^2 + y^2 = 1$

12) المجسم المحدد من أعلى بالمجسم المكافئ $z = 1 - x^2 - y^2$ ومن أسفل بالمستوى $z = -3$

13) بيّن أن حجم المجسم المقطوع من الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ بالأسطوانة $x^2 + y^2 = x$ يساوي $\frac{2}{9}(3\pi - 4)$

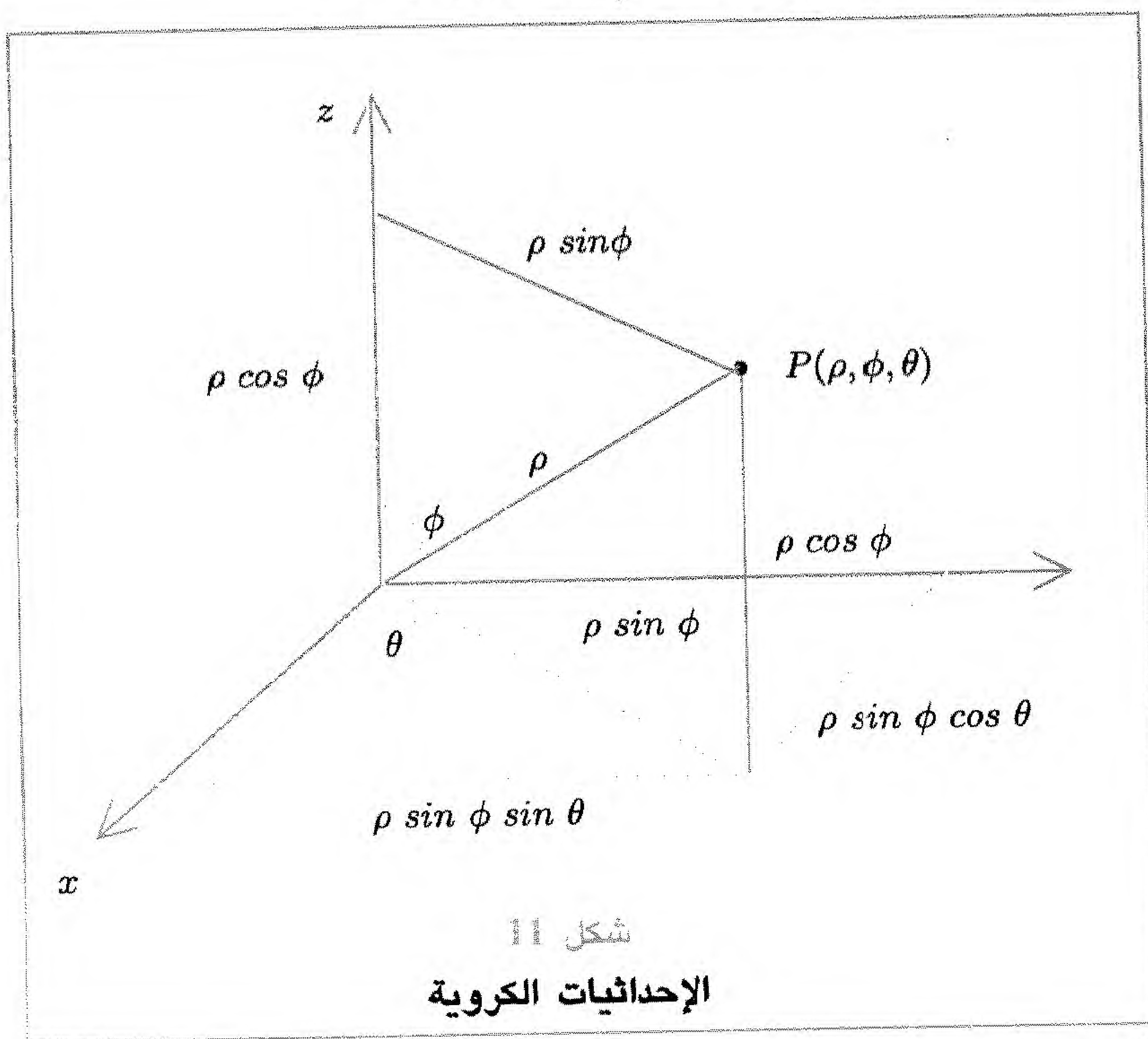
4.3 الإحداثيات الكروية والتكامل الثلاثي

الإحداثيات الكروية للنقطة $P(\rho,\phi,\theta)$ كما هو في الشكل (11) تشتمل على ما يأتي:

1 ـ المسافة من نقطة الأصل يرمز لها بالرمز ρ

2 ـ الزاوية ϕ بين ρ ومحور z

3 ـ الإحداثيات القطبية للزاوية θ في المستوى $x\,y$



شكل 11
الإحداثيات الكروية

حيث أن:

$$\rho \geq 0 \quad , \quad 0 \leq \phi \leq \pi \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

وبصورة مماثلة للإحداثيات الأسطوانية كل نقطة لا تقع على محور z وحيدة.

العلاقة بين الإحداثيات الكروية والمستطيلة

تحدد العلاقة من المعادلات التالية:

$$x = \rho\ sin\phi\ cos\theta \quad \text{و} \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$y = \rho\ sin\phi\ sin\theta \quad \text{و} \quad cos\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{\rho}$$

$$z = \rho\ cos\phi \quad \text{و} \quad tan\theta = \frac{x}{y}$$

وبصورة مماثلة للإحداثيات الأسطوانية نجد أن:

$$\iiint\limits_{S_{xyz}} f(x, y, z)dV = \iiint\limits_{S_{\rho\phi\theta}} f(\rho\ sin\ \phi\ cos\ \theta, \rho\ sin\ \theta\ sin\ \theta, \rho\ cos\ \phi)J\ d\rho\ d\phi\ d\theta$$

حيث أن $J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 sin\ \phi$

مثـــال 1

أوجد $\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 \rho^2 sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$

الحـــل

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 \rho^2 sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin\phi\ d\phi\ d\theta$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

ملاحظة :

تم اختصار بعض الخطوات في إجراء عمليات التكامل في المثال السابق وليس من الصعب على القارئ استنتاجها.

مثال 2

أوجد قيمة التكامل $\iiint\limits_S x^2\, dV$

حيث أن S المجسم بين الكرتين $x^2+y^2+z^2=4$ و $x^2+y^2+z^2=9$

الحل

$$\iiint\limits_S x^2\, dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_2^{3} \rho^2 sin^2\phi cos^2\theta(\rho^2 sin\phi) dP\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{5}\rho^5\right)\Bigg|_2^3 sin^3\phi cos^2\theta d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{211}{5}\int_0^{2\pi}\left(-\int_0^{\pi} sin^2\phi\, d\, cos\phi\right) cos^2\,\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{211}{5}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}(1-cos^2\phi) d\, cos\phi\right) cos^2\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{211}{5}\int_0^{2\pi}\left(cos\phi - \frac{1}{3}cos^3\phi\right)\Bigg|_0^{\pi} cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{844}{15} \int_{0}^{2\pi} cos^2 \; d\theta$$

$$= \frac{844}{30} \left[\theta + \frac{1}{2} sin \; 2\theta \right]_{0}^{-\pi}$$

$$= \frac{844}{30} (2\pi) = \frac{844}{15} \pi$$

مثـال 3

أوجد الحجم الذي يقع فوق المخروط $z^2 = x^2 + y^2$ وداخل الكرة

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2az$$

الحـل

معادلة المخروط بالإحداثيات الكروية هي

$$\rho^2 cos^2\phi = \rho^2 sin^2\phi \Longrightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

ومعادلة الكرة بالإحداثيات الكروية هي

$$\rho^2 = 2a \; \rho \; cos\phi \Longrightarrow \rho = 2acos \; \phi$$

وهكذا فإن:

$$V(S) = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{0}^{2acos\phi} \rho^2 sin\phi \; d\rho \; d\phi \; d\theta$$

$$= \frac{8a^3}{3} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} cos^3\phi \; sin\phi \; d\phi \; d\theta$$

$$= -\frac{8a^3}{3} \int_{0}^{2\pi} \left(\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} cos^3\phi \; d \; cos\phi \right) d\theta$$

$$= -\frac{2a^3}{3}\int_0^{2\pi}\left(cos^4\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)\,d\theta$$

$$= -\frac{2a^3}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$= \left(\frac{6a^3}{12}\right)(2\pi) = \pi a^3$$

مثـال 4

أوجد I حيث أن

$$I = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)dz\,dy\,dx$$

الحـل

لاحظ أن المجسم يقع بين المخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ والكرة $z=\sqrt{8-x^2-y^2}$
والمنطقة R في المستوى $x\,y$، هي عبارة عن دائرة $x^2+y^2=4$

وباستخدام الإحداثيات الكروية نجد أن:

معادلة المخروط: $\rho\ cos\phi = \rho sin\phi \Longrightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$

ومعادلة الكرة $\rho^2 = 8 \Longrightarrow \rho = 2\sqrt{2}$

وبما أن المنطقة R في المستوى $x\,y$ وهي عبارة عن دائرة فإن $0 \le \theta \le 2\pi$.

ولذلك

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\sqrt{2}}\rho^2(\rho^2 sin\theta)d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= \frac{1}{5}(2\sqrt{2})^5\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}sin\phi\,d\phi\,d\theta$$

$$=\frac{1}{5}(2\sqrt{2})^5\int_0^{2\pi}(-cos\phi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta$$

$$=\frac{1}{5}(2\sqrt{5})^5\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{32}{5}(4)(\sqrt{2}-1)(2\pi)=\frac{256\pi}{5}(\sqrt{2}-1)$$

مثـــال 5

أوجد كتلة النجم الذي يشغل المنطقة الكروية S والتي مركزها نقطة الأصل وكثافتها

$$\delta(x,y,z)=c\ exp-[(x^2+y^2+z^2)/a^2]^{\frac{3}{2}}$$

الحــل

$$M(S)=\iiint_S\delta(x,y,z)dV=c\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}e^{-\frac{\rho^3}{a^3}}\rho^2 sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$$

$$=-\frac{ca^3}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(e^{-\frac{\rho^3}{a^3}}\Big|_0^a\right)sin\phi\ d\phi\ d\theta$$

$$=-\frac{ca^3}{3}\left(\frac{1}{e}-1\right)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}sin\phi\ d\phi\ d\theta$$

$$=\frac{ca^3}{3}\left(\frac{1}{e}-1\right)\int_0^{2\pi}\left(cos\phi\Big|_0^{\pi}\right)d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\pi\ c\ a^3\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

مثـــال 6

أوجد $\iiint\limits_S z\, dv$

حيث أن S جزء من الكرة $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ الذي يقع في الثمن الأول

الحـــل

$$\iiint\limits_S z\, dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a} \rho\, cos\phi\, \rho^2\, sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= -\frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\phi\, d\, cos\phi\, d\theta$$

$$= -\frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2\phi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\, d\theta$$

$$= \frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi a^4}{16}$$

مثـــال 7

أوجد مركز الكتلة (centroid) للمنطقة الواقعة تحت الكرة $x^2+y^2+z^2=z$ وفوق المخروط $z^2=x^2+y^2$

الحـــل

يمكن كتابة معادلة الكرة على الصورة التالية:

$\rho^2 = \rho\, cos\, \phi$ أو $\rho = cos\, \phi$

وبما أن

$$x^2 + y^2 = \rho^2 sin^2\ \phi\ cos^2\theta + \rho^2 sin^2\ \phi\ sin^2\theta$$

$$= \rho\ sin^2\ \phi$$

فإن معادلة المخروط تكتب على الصورة التالية:

$$\rho^2 cos^2\ \phi = \rho^2\ sin^2\ \phi$$

او

$$cos^2\ \phi = sin^2\ \phi$$

وبما أن $0 \le \phi \le \pi$ إذن $\phi = \frac{\pi}{4}$

وإذا كانت كثافة المنطقة مقداراً ثابتاً k، فإن:

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{cos\varphi} k\rho^2 sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta$$

ويترك للقارئ أن يبين:

$$M = \frac{\pi\ k}{8}$$

وبما أن $x = \rho\ sin\ \varphi\ cos\ \theta$ إذن

$$M_{yz} = k \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{cos\varphi} (\rho sin\varphi\ cos\theta)\rho^2 sin\varphi\ d\rho\ d\varphi\ d\theta = 0$$

ويترك للقارئ تحقيق النتيجة السابقة.

كذلك $y = \rho\ sin\ \varphi\ sin\ \theta$ إذن:

$$M_{xz} = k \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{cos\varphi} (\rho sin\varphi\ sin)\rho^2 sin\varphi\ d\rho\ d\varphi\ d\theta = 0$$ (لماذا؟)

وأخيراً بما أن $z = \rho cos\varphi$ إذن

$$M_{xy} = k \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{cos\varphi} (\rho\ cos\varphi)\rho^2 sin\phi\ d\rho\ d\varphi\ d\theta$$

$$== \frac{k}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^5\varphi\ sin\varphi\ d\varphi\ d\theta$$

$$= -\frac{k}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^5\varphi\ d\ cos\varphi\ d\theta$$

$$= -\frac{k}{24} \int_0^{2\pi} \left(cos^6\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) d\theta$$

$$= -\frac{k}{24} \left(\frac{1}{8} - 1\right) \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \left(-\frac{k}{24}\right) - \left(-\frac{7}{8}\right)(2\pi) = \frac{7\pi k}{96}$$

وبذلك يمكن كتابة مركز الكتلة كما يلي:

$$(x, y, z) = \left(0, 0, \frac{M_{xy}}{M}\right) = \left(0, 0, \frac{7}{12}\right)$$

مثـــال 8

أوجد حجم ومركز كتلة المنطقة المحددة بالمخروط $\varphi = \frac{\pi}{6}$ والكرة $\rho = 2a\ cos\varphi$ التي نصف قطرها a حيث سطح الكرة مماس للمستوى $x\ y$ عند نقطة الأصل.

الحــل

المنطقة محددة بالمتباينات التالية:

$$\leq \rho \leq 2a\ cos\varphi \quad \text{و} \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}\ ,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

انظر الشكل (12)

وهكذا

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{2a\,cos\varphi} \rho^2 sin\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\rho^3 sin\varphi\Big|_0^{2a\,cos\varphi}\right) d\varphi\, d\theta$$

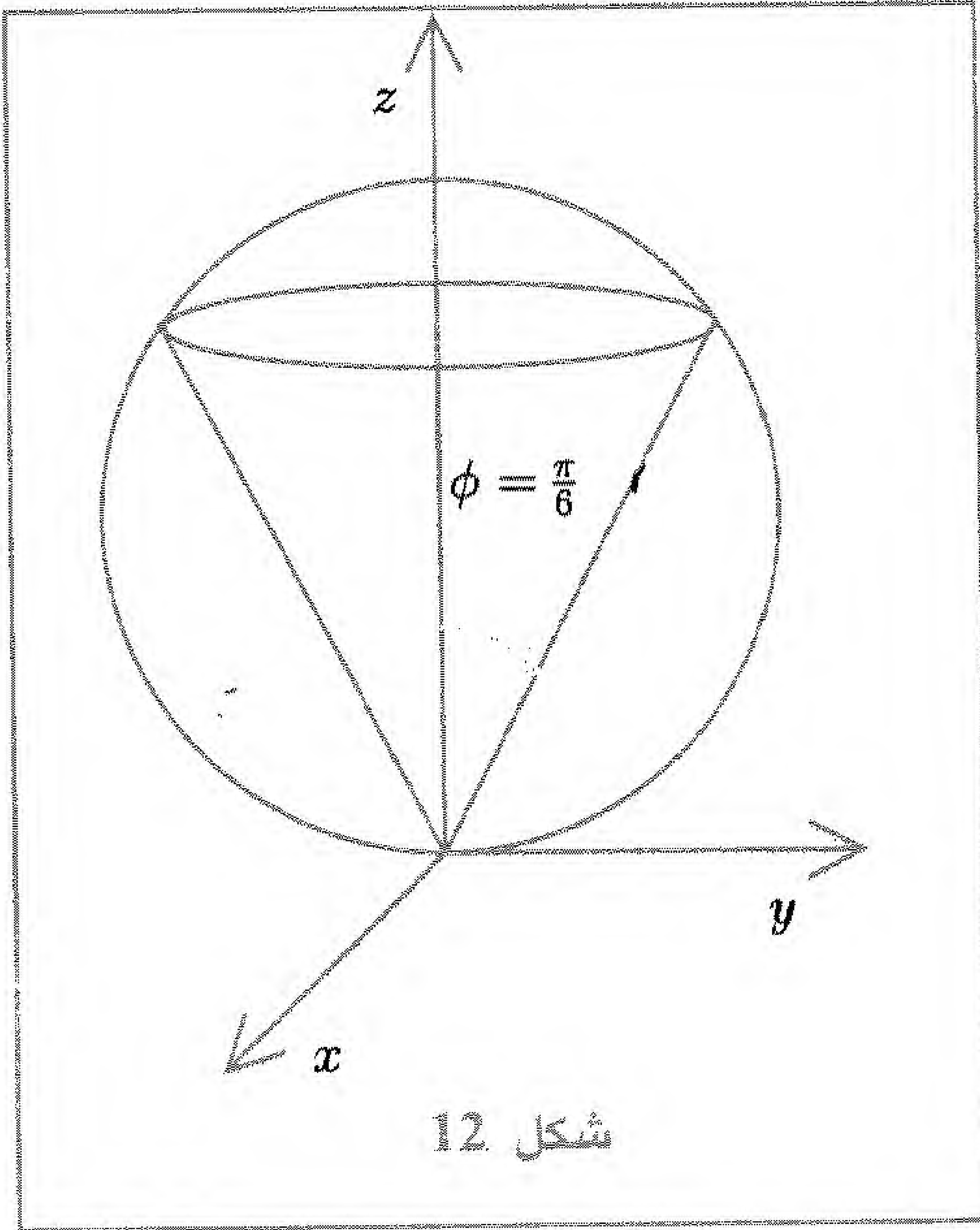
$$= \frac{8a^3}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} cos^3\varphi\ sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

$$= -\frac{8a^3}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} cos^3\varphi\ d\ cos\varphi\, d\theta$$

$$= -\frac{8a^3}{12}\int_0^{2\pi} (cos^4\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta$$

$$= -\frac{8a^3}{12}\left(\frac{9}{16}-1\right)\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= -\frac{8a^3}{12}\left(-\frac{7}{16}\right)(2\pi) = \frac{7}{12}\pi a^3$$



شكل 12

ولإيجاد مركز الكتلة، واضح أن $x = y = 0$ (راجع المثال السابق).

وإذا كانت الكثافة تساوي 1، فإن:

$$M = \iiint_\Omega dV = \frac{7}{12}\pi a^3$$

العزم بالنسبة للمستوى $x\,y$ يكتب كما يلي:

$$M_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} z\, dv$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\int_0^{2a\, cos\varphi} \rho^3 cos\varphi\ sin\varphi\ d\rho\ d\varphi\ d\theta$$

$$= 4a^4 \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} cos^5\varphi\ sin\varphi\ d\varphi\ d\theta$$

$$= -4a^4 \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{6}} cos^5\varphi\ d\ cos\varphi\ d\theta$$

$$= -\frac{4}{6}a^4 \int_0^{2\pi} (cos^6\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta$$

$$= -\frac{2}{3}a^4\left(\frac{27}{64}-1\right)\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= -\frac{4}{3}a^4\pi\left(-\frac{37}{64}\right) = \frac{37}{48}a^4\pi$$

ومنها

$$z = \left(\frac{37a^2\pi}{48}\right)\left(\frac{12}{7\pi a^3}\right) = \frac{37a}{28}$$

إذن مركز الكتلة يكتب كما يلي:

$$(x, y, z) = \left(0, 0, \frac{37a}{28}\right)$$

تمارين 4.3

أوجد قيمة التكاملات التالية:

1) $$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{-\sqrt{9-x^2-y^2}}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} dz\, dy\, dx$$

2) $$\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \left(1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) dz\, dy\, dx$$

3) $$\int_{0}^{a}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{z^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dz\, dy\, dx$$

4) $$\int_{0}^{a}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^3\, dz\, dy\, dx$$

5) إذا كانت معادلة سطح الكرة في R^4 تكتب كما يلي:

$$x^2+y^2+z^2+w^2=a^2$$

فأوجد حجم الكرة. (استخدم الإحداثيات الكروية).

6) بيّن أن الحجم المقطوع من الكرة $\rho = a$ بالمخروط $\phi = \alpha$ يساوي

$$\frac{2\pi a^3}{3}(1-cos\alpha)$$

7) أوجد حجم المجسم الذي يقع فوق المخروط $z^2 = x^2+y^2$ وداخل الكرة $x^2+y^2+z^2=4z$

8) أوجد حجم المجسم الذي يقع خارج المخروط $z^2=x^2+y^2$ وداخل الكرة $x^2+y^2+z^2=1$

9) أوجد كتلة المجسم الذي يقع خارج الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ وداخل الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ إذا كانت الكثافة عند النقطة ρ تتناسب طرداً مع مربع المسافة من مركز الكرة إلى النقطة ρ

10) أوجد كتلة المجسم المحدد بالكرتين:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

إذا كانت كثافة المساحة عند النقطة $\rho(x, y, z)$ تساوي المعكوس الضربي للمسافة من النقطة (x, y, z) إلى نقطة الأصل.

5.3 تغيير المتغيرات في التكامل الثلاثي

الإحداثيات الأسطوانية والكروية تعتبر حالات خاصة من طريقة تغيير المتغيرات في التكامل الثلاثي أو تحويل المناطق في ثلاثة أبعاد. الطريقة مشابهة لطريقة تغيير المتغيرات في التكامل الثنائي كما سيتضح فيما بعد.

نفرض أن المنطقة G في الفضاء $F(x,y,z)$ يمكن التفكير فيها كالدالة التالية:

$$F\big(g(u,v,w),\ h(u,v,w),\ k(u,v,w)\big) = H(u,v,w)$$

معرّفة على المنطقة G في الفضاء $u\ v\ w$ حُولت آحادياً (One - to - One) إلى المنطقة Ω في الفضاء $x\ y\ z$ لمعادلات قابلة للتفاضل على الصورة التالية:

$$x = g(u,v,w),\ \ y = h(u,v,w),\ \ z = k(u,v,w)$$

أي دالة معرفة على Ω في الفضاء $u\ v\ w$. إذا كانت مشتقات الدوال g,h,k من الرتبة الأولى متصلة فإن تكامل الدالة $F(x,y,z)$ على Ω يعرف كما يلي:

$$\iiint\limits_{\Omega} F(x,y,z)dx\ dy\ dz = \iiint\limits_{\Omega} H(u,v,w)|J|du\ dv\ dw \qquad (1)$$

حيث أن $J(u,v,w)$ يعرف كما يلي:

$$J(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

مثال 1

أوجد

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{y/2}^{(y/1)+1} \left(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3}\right) dx\ dy\ dz$$

مستخدماً التحويل

$$w = z/3 \ , \ v = y/2 \ , \ u = (2x - y)/2$$

الحـل

واضح أن:

$$z = 3w \ , \ y = 2v \ , \ x = u + v$$

المنطقة G في الفضاء $u\,v\,w$ تحدد من معادلات حدود المنطقة Ω في الفضاء $x\,y\,z$ كما يلي:

$$x = y/2 \quad \Longrightarrow \quad u = 0$$

$$x = (y/2) + 1 \quad \Longrightarrow \quad u = 1$$

$$y = 0 \quad \Longrightarrow \quad v = 0$$

$$y = 4 \quad \Longrightarrow \quad v = 2$$

$$z = 0 \quad \Longrightarrow \quad w = 0$$

$$z = 3 \quad \Longrightarrow \quad w = 1$$

ويمكن إيجاد محدد جاكوبي من العلاقة (2)

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

والآن يمكن تطبيق العلاقة (1):

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{y/2}^{(y/2)+1} \left(\frac{2x - y}{2} + \frac{z}{3} \right) dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u + w)|J| dw\, dv\, du$$

$$= 6\int_0^1\int_0^2\int_0^1 (u+w)dw\ dv\ du$$

$$= 6\int_0^1\int_0^2 \left(uw + \frac{1}{2}w^2\right)\Big|_0^1 dv\ du$$

$$= 6\int_0^1\int_0^2 \left(u + \frac{1}{2}\right) dv\ du$$

$$= 12\int_0^1 \left(u + \frac{1}{2}\right) du$$

$$= 12\left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u\right)\Big|_0^1$$

$$= 12(1) = 12$$

مثــال 2

إذا كانت Ω منطقة في الفضاء $x\ y\ z$ معرفة بالمتباينات التالية:

$$1 \le x \le 2\ ,\ 0 \le x\ y \le 2\ ,\ 0 \le z \le 1$$

فأوجد $\displaystyle\iiint_\Omega (x^2y + 3xyz)dx\ dy\ dz$

الحــل

بعد فحص الدالة المكاملة وحدود المنطقة Ω في الفضاء $x\ y\ z$ يفضل استخدام التحويل التالي: $w = 3z\ ,\ v = xy\ ,\ u = x$

واضح أن: $z = \frac{1}{3}w\ ,\ y = \frac{v}{u}\ ,\ x = u$

حدود المنطقة G في الفضاء $u\ v\ w$ تحدد من متباينات حدود المنطقة Ω في الفضاء xyz:

$$1 \le x \le 2 \quad \Longrightarrow \quad 1 \le u \le 2$$

$$0 \le x\ y \le 2 \quad \Longrightarrow \quad 0 \le v \le 2$$

$$0 \le z \le 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 \le w \le 3$$

وبتطبيق العلاقة (2) نجد أن:

$$J(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -v/u^2 & 1/u & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{vmatrix}$$

وبعد فك المحدد نحصل على:

$$J = \frac{1}{3u}$$

الآن يمكن تطبيق العلاقة (1):

$$\iiint\limits_{\Omega} (x^2y + 3xyz)dx\ dy\ dz$$

$$= \int_1^2 \int_0^2 \int_0^3 (uv + vw)\left(\frac{1}{3u}\right) dw\ dv\ du$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 \int_0^2 \left(uw + \frac{1}{2}\ \frac{vw^2}{u}\right)\Bigg|_0^3 dv\ du$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 \int_0^2 \left(3v + \frac{9v}{2u}\right) dv\ du$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{2}v^2 + \frac{3}{4}\ \frac{v^2}{u}\right)\Bigg|_0^2 dy$$

$$= \int_1^2 \left(2 + \frac{3}{u}\right) du$$

$$= 2u + 3Lnu\Big|_1^2$$

$$= 2 + 3Ln2$$

مثـــال 3

أوجد حجم المجسم الناقص (Ellipsoid)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

الحــل

نستخدم التحويل $x = au$, $y = bv$ و $z = cw$

معادلة المجسم الناقص في الفضاء $x\ y\ z$ تكون كرة في الفضاء $u\ v\ w$ أي أن:

$$u^2 + y^2 + w^2 = 1$$

حجم هذه الكرة يكون $\frac{4}{3}\pi$ ومن العلاقة (2) نجد أن:

$$J = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

وبما أن محدد جاكوبي مقدار ثابت إذن حجم المجسم الناقص يكون:

$$\left(\frac{4}{3}\pi\right)(J) = \frac{4}{3}\pi a\ b\ c$$

ملاحظة:

تؤخذ القيمة المطلقة لمحدد جاكوبي إذا كانت القيمة سالبة.

تمارين 5.3

1) أوجد

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 y \, dV$$

حيث أن Ω المنطقة المحاطة بالمجسم الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

2) أوجد حجم المجسمات التالية:

أ) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{50}\leq 2 \; ; \; x\geq 0 \; , \; y\geq 0$

ب) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}\leq 1 \; ; \; x,y>0 \; , \; z\leq 0$

ج) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}\leq 1$

3) اعتبر التحويل

$$w=x+y+z \quad , \quad v=y+2z \quad , \quad u=2x+y$$

أ) أوجد $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$

ب) أوجد z,y,x بدلالة w,v,u

4) أوجد

$$\iiint |x \; y \; z| dx \, dy \, dz$$

على المجسم الناقص

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$$

5) بيّن أنه إذا كان $u=x-y$ و $v=y$ فإن:

$$\int_0^\infty \int_0^x e^{-st} f(x-y,y) dy \, dx$$

$$=\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(u,v) du \, dv$$

تمارين الفصل الثالث

أوجد قيمة التكاملات التالية:

1) $\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} sin(x+y+z)dx\ dy\ dz$

2) $\int_{ln6}^{ln7}\int_0^{ln2}\int_{ln4}^{ln5} e^{(x+y+z)}dz\ dy\ dx$

3) $\int_1^{e}\int_1^{x}\int_0^{z} \frac{2y}{z^3}dy\ dz\ dx$

أوجد قيمة التكاملات التالية:

4) $\iiint_R (x+3y)dv;\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1,\ -1\le z\le 0$

5) $\iiint_R (1+3z^2)dx\ dy\ dz;\ x^2+y^2+z^2\le 4,\ z\ge 0$

6) $\iiint_R (x^2+y^2)dv;\ x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le 2-x^2-y^2$

7) أوجد $\iiint_R (x+z)dv$ حيث أن R المنطقة خارج الدائرة $x^2+y^2=1$ وداخل الكرة $x^2+y^2+z^2=4$

8) أوجد $\iiint_R y\ dv$ حيث أن R المنطقة خارج الدائرة $x^2+y^2=1$ وداخل الكرة $x^2+y^2+z^2=4$

الإحداثيات الأسطوانية والكروية

أوجد قيمة التكاملات التالية مستخدماً الإحداثيات الأسطوانية أو الكروية:

9) $\iiint_R ydv$ حيث أن R تكون $x^2+y^2\le 1$ و $-1\le z\le 3$

10) $\iiint\limits_R z^2dv$ حيث أن R تكون $x^2+y^2 \leq 4$ و $x \geq 0$

11) $\iiint\limits_R exp(x^2+y^2)dv$ حيث أن R تكون $x^2+y^2 \leq 9$ و $0 \leq z \leq 2$

12) $\iiint\limits_R z^4dv$ حيث أن R تكون $x^2+y^2+z^2 \leq 9$

13) $$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-(x^2+y^2)}^{(x^2+y^2)} 21xy^2dz\ dy\ dx$$

14) $$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y2}}^{1} dz\ dy\ dz$$

15) عبّر عن التكامل التالي بالإحداثيات الديكارتية ورتّب التكامل $(dz\ dy\ dx)$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{3}} \int_1^{\sqrt{4-r^2}} r^3 sin\theta cos\theta z^2 dz\ dr\ d\theta$$

16) إذا أمكن كتابة الدالة $f(x,y)$ كحاصل ضرب دالتين على الصورة:

$$f(x,y) = F(x)\ G(y)$$

فإن تكامل الدالة f على المنطقة المستطيلية $R : a \leq x \leq b\ ,\ c \leq y \leq d$ يمكن إيجاده كحاصل ضرب أيضاً بالصيغة التالية:

أ) $$\iint\limits_R f(x,y)dA = \left(\int_a^b F(x)dx\right) \left(\int_c^d G(y)dy\right)$$

والمجادلة تكون:

ب) $$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_a^b F(x)G(y)dx \right) dy$$

ج) $$= \int_c^d \left(G(y) \int_a^b F(x)dx \right) dy$$

د) $$= \int_c^d \left(\int_a^b F(x)dx \right) G(y)dy$$

هـ) $$= \left(\int_a^b F(x)dx \right) \int_c^d G(y)dy$$

أعطِ أسباب صحة الخطوات (ب ـ هـ) ثم استخدم ذلك لإيجاد قيمة التكاملات التالية:

أ) $$\int_0^{ln2} \int_0^{\pi/2} e^x cosy\, dy\, dx$$

ب) $$\int_0^2 \int_{-1}^1 \frac{x}{y^2} dx\, dy$$

أوجد قيمة التكاملات التالية:

17) $$\int_1^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4cos(x^2)}{2\sqrt{z}} dx\, dy\, dz$$

18) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-cos\, t}^{cos\, z} \int_{-cos\, zy}^{cos\, zy} xcos\, zy\, dx\, dy\, dz$$

19) $$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{sin2z}{4-z} dy\, dz\, dx$$

20) أوجد a حيث أن:

$$\int_0^1 \int_0^{4-a-x^2} \int_0^{4-x^2-y} dx\, dy\, dx = \frac{4}{15}$$

21) أوجد كتلة المجسم المحدد بالسطح $z = 16 - 2x^2 - 2y^2$ و $z = 2x^2 + 2y^2$ إذا كانت كثافة المجسم $\sqrt{x^2 + y^2}$

22) إذا كانت B كرة الوحدة $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ و u الجزء العلوي من B فأوجد:

أ) مركز كتلة u ب) عزم القصور الذاتي لـ B حول محور z

23) أوجد عزم القصور الذاتي حول نقطة الأصل للمنطقة التي تشتمل على كل النقاط التي تحقق $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ والكثافة تكون $\rho = x^2 + y^2$

24) أوجد عزم القصور الذاتي حول محور z للمنطقة التي تشتمل على كل النقاط (x, y, z) التي تحقق $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$

25) أوجد حجم المنطقة Ω حيث أن:

$$\Omega = \{(x, y, z) : 4y^2 + qz^2 \leq 36, 0 \leq 5x - y + 27 \leq 10\}$$

26) أوجد حجم المنطقة Ω حيث أن:

$$\Omega = \{(x, y, z) : |z| \leq 1 \ , \ |x + 3y| \ , \ |x - y + z| \leq 2\}$$

27) $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{sec\phi} (\rho \ cos\phi)\rho^2 sin\phi \ d\rho \ d\phi \ d\theta$$

28) $$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{(1-cos\phi)/2} \rho^2 sin\phi \ d\rho \ d\phi \ d\theta$$

29) $$\int_{\pi/6}^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{csc\phi}^{2} 5\rho^4 sin^3\phi \ d\rho \ d\theta \ d\phi$$

30) $$\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_{-1/2}^{1/2} (r^2 sin^2\theta + z^2) dz \ dr \ d\theta$$

الفصل الرابع

المجالات المتهجة والتكامل الخطي

1.4 المجالات المتجهة (Vector Fields)

تعريف 1

إذا كان لكل نقطة p في المنطقة G متجه $\vec{F}(p)$ فإن فئة كل المتجهات تسمى مجالاً متجهاً.

ويعتبر مجال الجاذبية الأرضية والمجال الكهربائي ومجال حركة السوائل أمثلة على المجالات المتجهة.

ويعبّر عن المجال المتجه $\vec{F}$ بصورة مماثلة للمتجه في ثلاثة أبعاد:

$$\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)i + N(x,y,z)j + P(x,y,z)k$$

أو بصورة مختصرة

$$\vec{F} = Mi + Nj + Pk$$

ملاحظة

المجال المتجه $\vec{F}$ متصل إذا وفقط إذا كانت P, N, M دوال متصلة عند النقطة (x, y, z)

تعريف 2

التدرج (The Gradient)

إذا كانت الدالة f في ثلاثة متغيرات قابلة للاشتقاق، فإن تدرج الدالة f يعتبر في الحقيقة مجالاً متجهاً ويرمز له بالرمز $gradf$ أو ∇f ويعرف كما يأتي:

$$gradf(x,y,z) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j + \frac{\partial f}{\partial z}k$$

تعريف 3

الانحراف (The divergence)

إذا كان المجال المتجه

$$\vec{F} = Mi + Nj + Pk$$

حيث أن المشتقات الجزئية $\frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial N}{\partial y}, \frac{\partial M}{\partial x}$ موجودة، فإن انحراف المجال المتجه $\vec{F}$ هو

$$div\ \vec{F}(x,y,z) = \nabla.\vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

تعريف 4

الالتفاف أو الدوران (The curl)

إذا كان المتجه

$$\vec{F} = Mi + Nj + Pk$$

حيث أن كل المشتقات الجزئية الأولى للدوال P, N, M موجودة، فإن التفاف

المجال $\vec{F}$ يعرف كما يلي:

$$curl\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

نظرية 1

إذا كان المجال المتجه

$$\vec{F} = Mi + Nj + Pk$$

وإذا وجدت دالة f ومشتقاتها المختلطة (mixed) متصلة وتدرجها المجال $\vec{F}$، فإن:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

وإذا كان المجال $\vec{F}$ متصلاً في كل النقاط (x, y, z) وتحققت المعادلات السابقة، فإنه توجد دالة f حيث أن:

$$\vec{F} = \nabla f$$

ملاحظة

إذا كان المجال المتجه

$$\vec{F}(x, y) = M(x, y)i + N(x, y)j$$

فإن الشرط في النظرية (1) يختزل إلى:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

مثال 1

أوجد الالتفاف والانحراف للمجال المتجه $\vec{F}$ حيث أن

$$\vec{F}(x,y,z) = e^x\ cos\ y\ i + e^x sin\ y\ j + zk$$

الحل

الالتفاف:

$$curl\vec{F}(x,y,z) = \nabla \times \vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x cosy & e^x siny & z \end{vmatrix}$$

وبفك المحدد حسب الصف الأول نجد أن:

$$curl\vec{F} = (0-0)i - (0-0)j + (e^x siny + e^x siny)k$$

$$= 2e^x\ sin\ y\ k$$

والانحراف

$$div\vec{F} = \nabla.\vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$= e^x cosy + e^x cosy + 1$$

$$= 2e^x cosy + 1$$

مثال 2

هل المجال المتجه $\vec{F}$ تدرج للدالة f؟ وإذا كانت الإجابة بنعم أوجد الدالة f.

حيث أن:

$$\vec{F}(x,y) = 2x\ y\ z\ i + x^2 z\ j + (x^2 y + 1)k$$

الحـــل

بتطبيق النظرية (1)

$$\frac{\partial P}{\partial y}=x^2=\frac{\partial N}{\partial z},\frac{\partial M}{\partial z}=2xy=\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial N}{\partial x}=2xz=\frac{\partial M}{\partial y}$$

ويمكن إيجاد الدالة f كما يأتي:

$$\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j+\frac{\partial f}{\partial z}k=\nabla f(x,y,z)$$
$$=2xyzi+x^2zj+(x^2y+1)k$$

ولذلك

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xyz,\frac{\partial f}{\partial y}=x^2z,\frac{\partial f}{\partial z}=x^2y+1$$

وبتكامل المعادلة $\frac{\partial f}{\partial x}=2xyz$ بالنسبة للمتغير x

$$f(x,y,z)=x^2yz+g(y,z) \qquad (1)$$

حيث أن الدالة $g(y,z)$ مقدار ثابت بالنسبة للمتغير x

وبتفاضل المعادلة (1) بالنسبة للمتغير y

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2z+\frac{\partial g}{\partial y} \qquad (2)$$

ولكن $\frac{\partial f}{\partial y}=x^2z$ وهذا يتضمن أن الدالة g مقدار ثابت بالنسبة للمتغير y

أي أن:

$$f(x,y,z)=x^2yz+g(z) \qquad (3)$$

وبتفاضل المعادلة (3) بالنسبة للمتغير z

$$\frac{\partial f}{\partial z}=x^2y+\frac{\partial g(z)}{\partial z}$$

ولكن $\frac{\partial f}{\partial z}=x^2y+1$

أي أن $\frac{\partial g(z)}{\partial z} = 1$ وهذا يتضمن

$$g(z) = z + c$$

حيث أن c مقدار ثابت ولذلك

$$f(x, y, z) = x^2 y\, z + z + c$$

تمارين 1.4

أوجد الانحراف $div\vec{F}$ والالتفاف $curl\vec{F}$ في الحالات التالية:

1) $\vec{F}(x, y, z) = 3xyz^2 i + y^2 sinz j + xe^{2z} k$

2) $\vec{F}(x, y, z) = x^3 Lnz i + xe^{-y} j - (y^2 + 2z)k$

بيّن ما يأتي:

3) $\nabla \times (F + G) = \nabla \times F + \nabla \times G$

4) $curl\ grad\ f = \vec{0}$

5) $div\ (curl\ \vec{F}) = 0$

6) $curl(grad\ f + curl\ F) = curl\ curl\ \vec{F}$

في التمارين من 7 ــ 12 بيّن إذا كان المجال المتجه F تدرّجاً لدالة ما f وإذا كان كذلك فأوجد الدالة f.

7) $\vec{F}(x, y) = e^y i + (xe^y + y)j$

8) $\vec{F}(x, y) = y^2 e^{xy} i + (1 + xy)e^{xy} j$

9) $\vec{F}(x, y) = (sin\ x\ y)i + (cos\ x\ y)j$

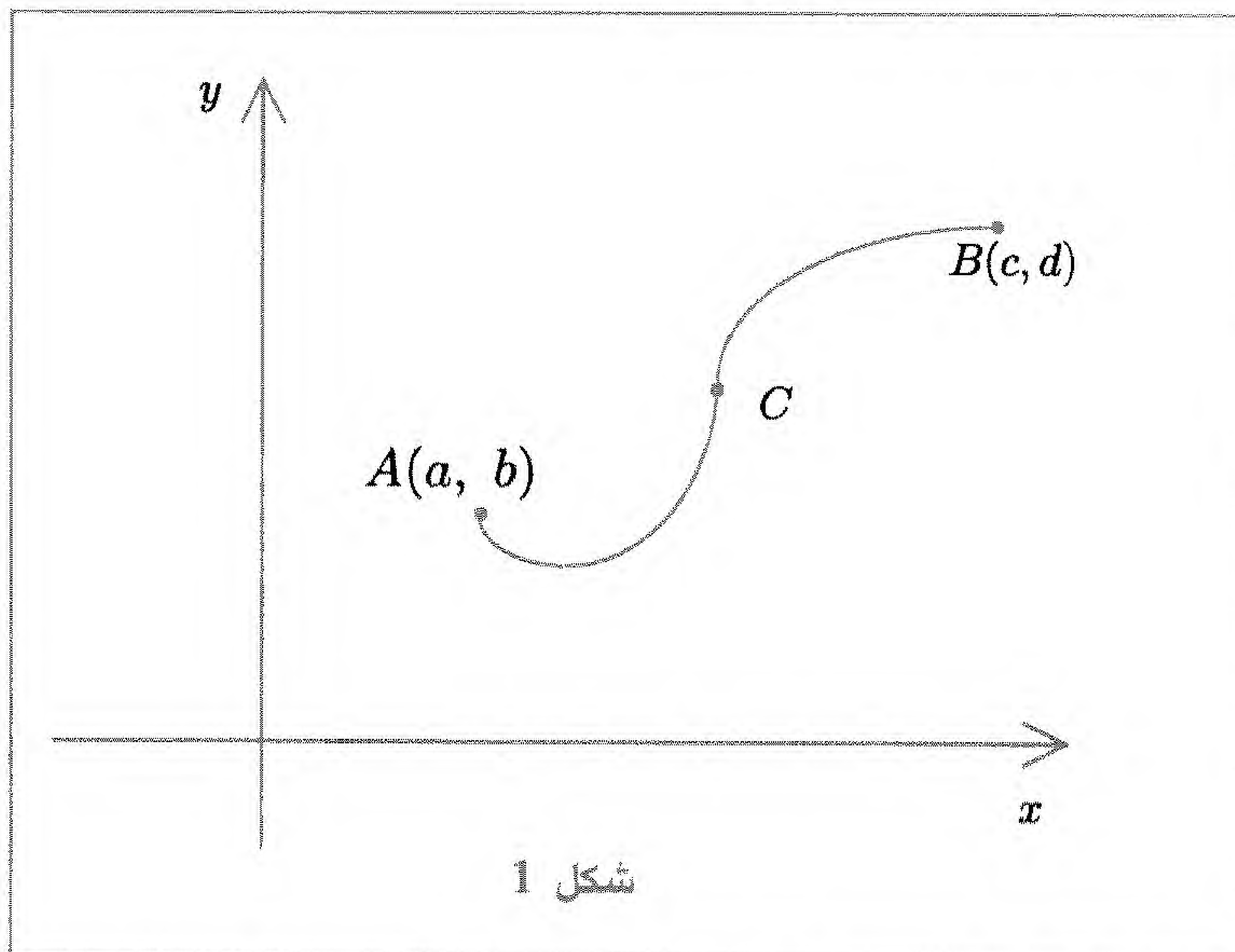
10) $\vec{F}(x, y) = (3x^2y^2 + 3y)i + (2x^3y + 3x)j$

11) $\vec{F}(x, y, z) = (y^2 + x^2)i + (z^2 + y^2)j + (x^2 + z^2)k$

12) $\vec{F}(x, y, z) = y\ ze^{xy} i + x\ ze^{xy} j + (e^{xy} + cos\ z)k$

2.4 التكامل الخطي (التكامل على منحنى)

نفرض أن القوس C(Arc) في المستوى xy يمتد من النقطة $A(a,b)$ إلى النقطة $B(c,d)$ كما هو موضح بالشكل (1).



شكل 1

ونفرض أن الدالة $f(x,y)$ متصلة ومعرّفة في المنطقة التي تشتمل على القوس c بداخلها.

نقسم القوس c إلى أقواس فرعية (Subarcs) بتعيين $n-1$ من النقاط بين النقطتين A وB:

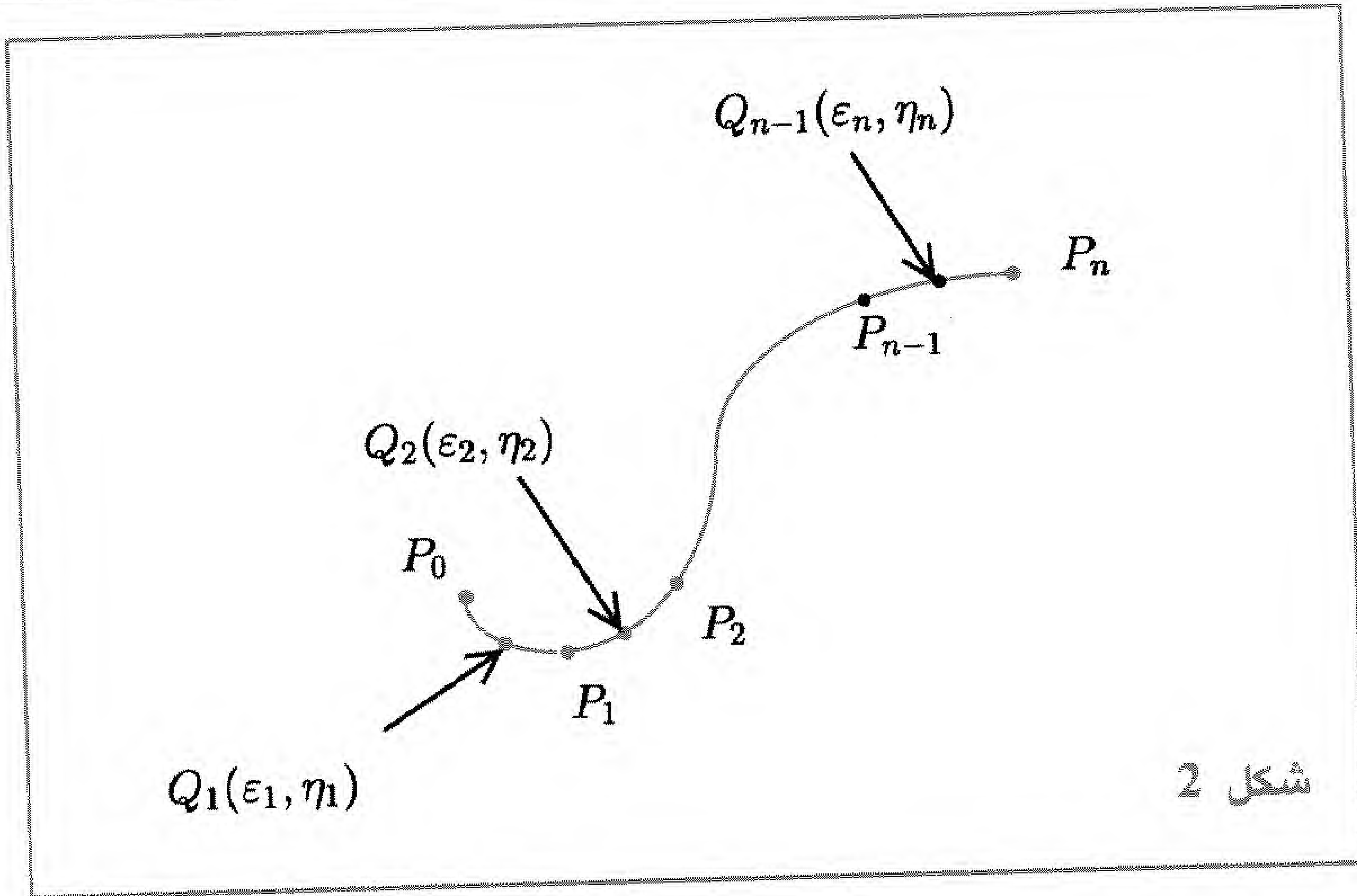
$$P_1, P_2, ..., P_{n-2}, P_{n-1}$$

حيث أن $P_n = B, P_0 = A$

ونرمز لإحداثيات النقطة P_i بالرمز (x_i, y_i) حيث أن $i = 0, 1, 2, ..., n$ وبين كل نقطتين متتاليتين في التقسيم نختار نقطة على المنحنى Q_i أنظر الشكل (2).

أي $Q_1, Q_2, ..., Q_n$

ونرمز لإحداثيات النقطة Q_i بالرمز (ε_i, η_i)



شكل 2

واختيار النقاط Q_i لكل $i=1,...,n$ اختياري يمكن أن يكون في أي مكان بشرط أن تكون Q_i على القوس الفرع بين النقطتين P_{n-1} وP_i.

الآن نعتبر المجموع

$$S=\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i,\eta_i)(x_i-x_{i-1})=\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i,\eta_i)\Delta x_i \tag{1}$$

حيث أن $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

ونرمز لمقياس أو معيار التقسيم (التجزيء) $P_0,P_1,...,P_n$ للمنحنى C بالرمز $\|\Delta\|$ حيث أن المقياس يساوي أكبر مسافة بين أي نقطتين متتاليتين في التقسيم.

تعريف 1

نفرض أنه يوجد العدد L الذي له الخاصية التالية:

لكل $\varepsilon>0$، توجد $\lambda>0$ حيث أن

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i,\eta_i)\Delta x_i - L\right|<\varepsilon \tag{1}$$

لكل تقسيم حيث أن $\|\Delta\|<\delta$ ولكل اختيار للنقطة (ε_i,η_i).

المجموع (1) يسمى التكامل الخطي للدالة f بالنسبة للمتغير x على المنحنى c وقيمة التكامل تساوي L المعرف كما سبق.

ويرمز للتكامل الخطي للدالة f بالرمز $\int\limits_c f(x,y)dx$

ملاحظة

التكامل الخطي يعتمد على الدالة f، وعلى نقطتي نهاية التكامل A وB وعلى القوس c.

وكذلك يمكن تكوين المجموع

$$\hat{S} = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i, \eta_i)\Delta y_i \qquad (2)$$

حيث أن النقاط (ε_i, η_i) تختار كما سبق.

وعندما $n \leftarrow \infty$ و $\|\Delta\| \to 0$، المجموع $\hat{S}$ يكافىء التكامل الخطي $\int\limits_c f(x,y)dy$.

ملاحظة

بصفة عامة $\int\limits_c f(x,y)dy \neq \int\limits_c f(x,y)dx$

إذا كان القوس c جزءاً من محور x، فإن التكامل الخطي $\int\limits_c f(x,y)dx$ يختزل إلى التكامل المعتاد:

$$(c)\int_A^B f(x,y)dx = \int_a^c f(x,0)dx$$

بينما $\int\limits_c f(x,y)dy = 0$

خواص التكامل الخطي

1) إذا تغير اتجاه القوس c، فإن إشارة التكامل تتغير أيضاً

$$(c)\int_A^B f(x,y)dx = -(c)\int_B^A f(x,y)dx$$

2) إذا كان القوس C_1 يمتد من A_1 إلى A_2 وC_2 يمتد من A_2 إلى A_3، فإن:

$$(C_1)\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)dx + (C_2)\int_{A_2}^{A_3} f(x,y)dx = (C_1+C_2)\int_{A_1}^{A_3} f(x,y)dx$$

3) خاصية الجمع

$$\int_c [f(x,y)+g(x,y)]dx = \int_c f(x,y)dx + \int_c g(x,y)dx$$

ويمكن تعريف التكامل الخطي بالنسبة لطول القوس x كما يأتي

$$(c)\int_A^B f(x,y)ds$$

حيث أن x ترمز إلى طول القوس من النقطة A إلى النقطة B.

وإذا كان القوس c على الصورة $y = g(x)$، فإن:

$$(c)\int_A^B f(x,y)ds = (c)\int_A^B f(x,y)\sqrt{1+(\dot{g}(x))^2}dx$$

وإذا كان القوس c على الصورة $x = h(y)$، فإن:

$$(c)\int_A^B f(x,y)ds = (c)\int_A^B f(x,y)\sqrt{1+(\dot{h}(y))^2}dx$$

وإذا لم يكن القوس c على الصورتين السابقتين، فإنه يمكن تجزئة القوس c إلى مجموعة من الأقواس، لكل واحد منها دالته المناسبة. وبذلك يمكن إيجاد التكامل الخطي على كل جزء وجمع التكاملات.

ويعرّف التكامل الخطي في ثلاثة أبعاد بطريقة مشابهة تماماً، والقوس c الذي يربط بين النقطتين A وB في ثلاثة أبعاد يمكن أن يمثل بالصورة البارامترية التالية:

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t) \quad \text{حيث أن} \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

أو بالصورة غير البارامترية:

$$y = g_1(x) \qquad \text{و} \qquad z = g_2(x)$$

وإذا كانت الدالة $f(x, y, z)$ معرّفة في المنطقة التي تشتمل على القوس c، فإن:

$$\int_c f(x, y, z)dx = \sum_{i=1}^{n} f(\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i)\Delta x_i$$

حيث أن $(\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i)$ إحداثيات النقطة Q_i.

والتكاملات الخطية $\int_c (f(x, y, z)dy$ و $\int_c f(x, y, z)dz$ تعرّف بطريقة مشابهة.

طرق إيجاد التكاملات الخطية:

التعريفات السابقة لا تستعمل عادة في إيجاد قيمة التكاملات الخطية كما هو الحال في التكاملات المعتادة.

ومن المشوق أن كل التكاملات الخطيّة يمكن اختزالها إلى التكاملات المعتادة التي درسنا طرق إيجادها بالتفصيل.

والنظرية التالية ترسخ قاعدة اختزال التكامل الخطي إلى التكامل المعتاد للدالة في متغير واحد.

نظرية 2

نفرض أن القوس c يمكن إيجاد طوله (Rectifiable) ويعطى على الصورة:

$$t_0 \leq t \leq t_1, x = x(t), y = y(t)$$

حيث أن النقطتين $A(a,b)$ و $B(c,d)$ تناظران t_0 و t_1 على التوالي.

وإذا كانت الدالة $f(x,y)$ متصلة في المنطقة التي تحتوي على القوس c وإذا كانت $x(t)$ و$y(t)$ متصلتين، فإن:

(أ)
$$(c)\int_A^B f(x,y)dx = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t), y(t)]\dot{x}(t)dt$$

(ب)
$$(c)\int_A^B f(x,y)dy = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t), y(t)]\dot{y}(t)dt$$

(جـ)
$$(c)\int_A^B f(x,y)ds = \int_{t_0}^{t_1} f[x(t), y(t)]\sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}dt$$

ومن السهل تعميم النظرية السابقة إلى التكامل الخطي للدالة في ثلاثة أبعاد، وكنتيجة للنظرية السابقة إذا كان القوس c على الصورة $y = g(x)$، فإن:

$$(c)\int_A^B f(x,y)dx = \int_a^c f[x, g(x)]dx$$

وإذا كان القوس c على الصورة $x = h(y)$، فإن:

$$(c)\int_A^B f(x,y)dy = \int_b^d f[h(x), y]dy$$

أمثلة محلولة

مثـــال 1

أوجد قيمة التكامل الخطي

$$\int_c (x^2 - y^2)dx - \int_c 2xydy$$

حيث أن c القوس الموضح بالشكل (3).

والمعادلة البارامترية للقوس c:

$$0 \leq t \leq 1, y(t) = t^2 + t + 2, x(t) = t^2 - 1$$

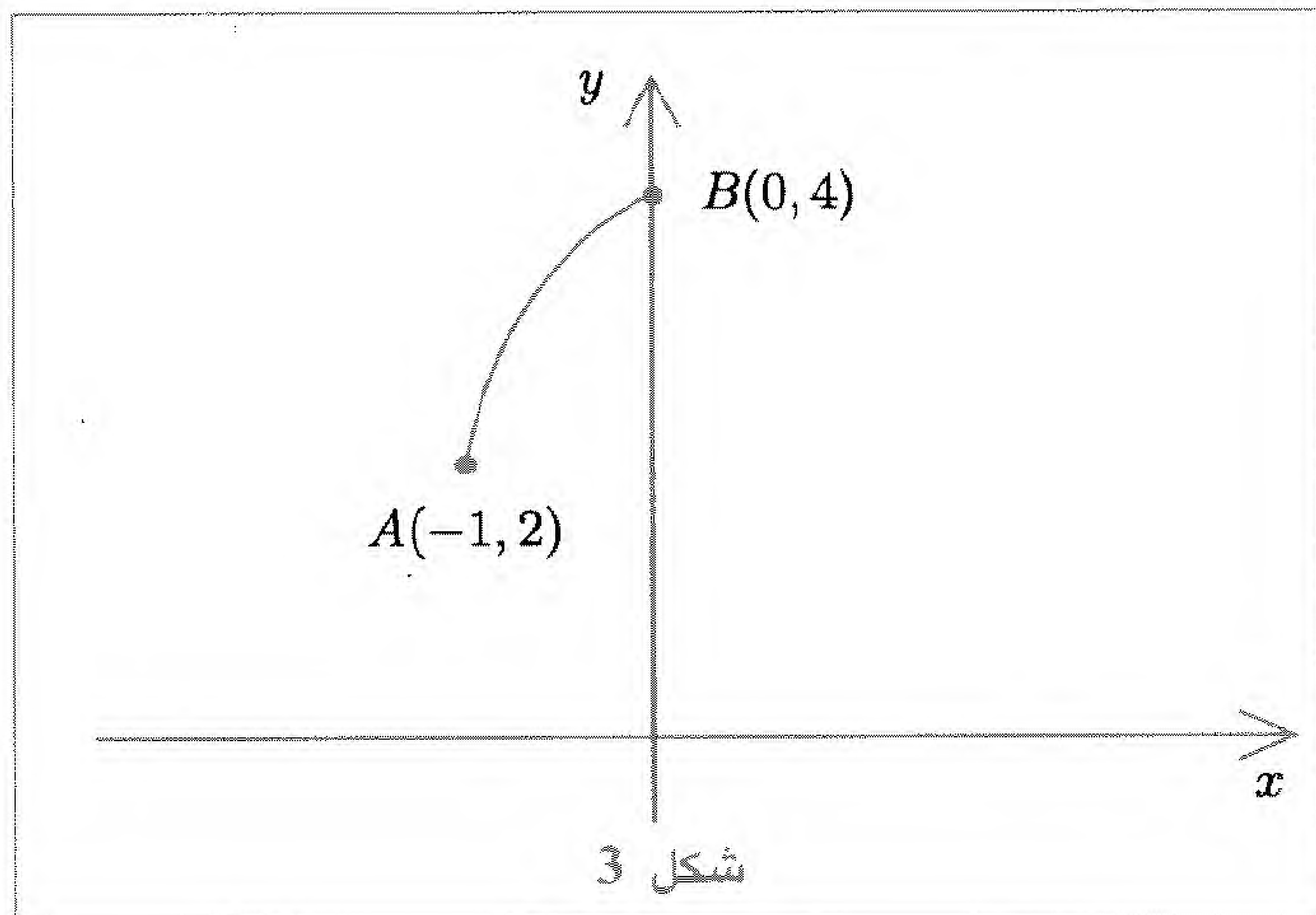
وبتطبيق الجزئين أ و ب من النظرية (1) نجد أن:

$$\int_c (x^2 - y^2)dx = \int_0^1 [t^2 - 1)^2 - (t^2 + t + 2)^2]2tdt$$

$$= -2\int_0^1 (t+3)(2t^2 + t + 1)2tdt$$

وبفك الأقواس وإجراء عملية التكامل نجد أن:

$$\int_c (x^2 - y^2)dx = (-2)\left(\frac{299}{60}\right) = -\frac{299}{30}$$



شكل 3

وبطريقة مماثلة يمكن إيجاد قيمة الجزء الثاني من التكامل الخطي:

$$-2\int_c x\ y\ dy = -2\int_0^1 (t^2-1)(t^2+t+2)(2t+1)dt$$

$$= -2\int_0^1 (t^4+t^3-t-2)(2t+1)dt$$

$$= -2\int_0^1 (2t^5+3t^4+3t^3-t^2-5t-2)dt$$

$$= -2\left[\frac{1}{3}t^6+\frac{3}{5}t^5+\frac{3}{4}t^4+\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2-2t\right]_0^1$$

$$= -2\left[\frac{1}{3}+\frac{3}{5}+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}-\frac{5}{2}-2\right]$$

$$= \frac{189}{30}$$

وهكذا

$$\int_c (x^2-y^2)dx - \int_c 2xydy$$

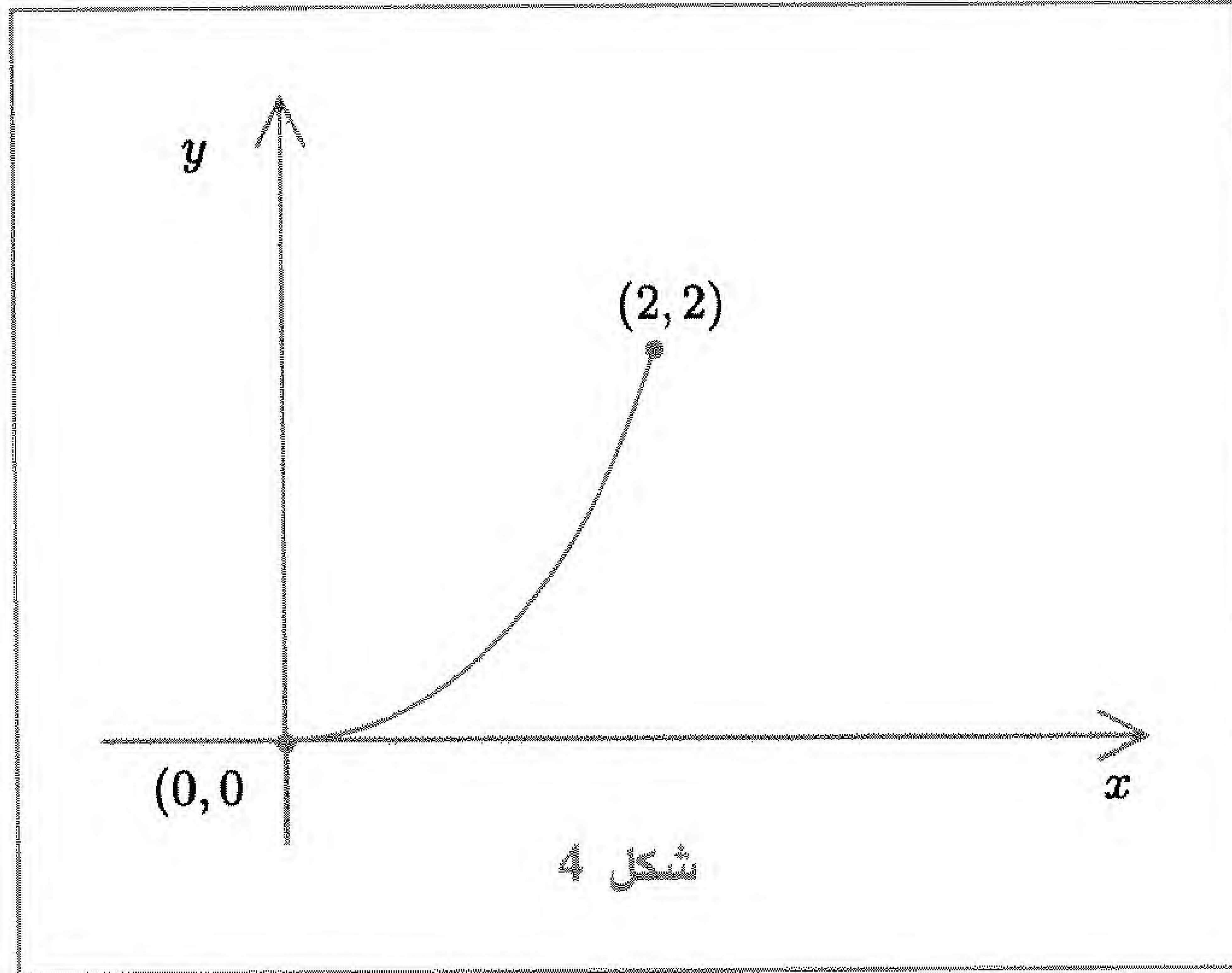
$$= -\frac{299}{30}+\frac{189}{30} = -\frac{11}{3}$$

مثـال 2

أوجد قيمة التكامل الخطي وارسم القوس c.

$$\int_c \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-y^2}}dx + \frac{2y}{4x^2+y^2}dy\right)$$

حيث أن c القوس $y=\frac{1}{2}x^2$ من النقطة $(0,0)$ إلى النقطة $(2,2)$.



شكل 4

الحـل

$$\int_c \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-y^2}}\,dx + \frac{2y}{4x^2+y^2}\,dy \right)$$

$$= \int_c \frac{x^2}{\sqrt{x^2-y^2}}\,dx + 2\int_c \frac{y}{4x^2+y^2}\,dy$$

على طول القوس c: $y=\frac{1}{2}x^2$.

وبذلك $dy = xdx$ وبالتعويض عن y نجد أن:

$$\int_c \frac{x^2}{\sqrt{x^2-y^2}} = \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^2-\frac{1}{4}x^4}}\,dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^2}{x\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}}\,dx = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2}}\,dx$$

$$-4\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)\Big|_0^2 = -4(-1) = 4$$

وبطريقة مماثلة

$$2\int_c \frac{y}{4x^2+y^2}dy = \int_0^2 \frac{x^2}{4x^2+\frac{1}{4}x^4}(x\ dx)$$

$$= \int_0^2 \frac{x}{4+\frac{1}{4}x^2}dx$$

$$= 2\ ln\left(4+\frac{1}{4}x^2\right)\Bigg|_0^2 = 2ln\ \frac{5}{4}$$

وبذلك

$$\int_c \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-y^2}}dx + \frac{2y}{4x^2+y^2}dy\right) = 4 + 2ln\frac{5}{4}$$

مثـال 3

أوجد قيمة التكامل الخطي

$$\int_c \left(x+(3y)^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}ds$$

حيث أن c القوس $y=\frac{1}{3}x^3$ من النقطة $(0,0)$ إلى النقطة $(3,9)$.

الحل

$$\int_c \left(x+(3y)^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}ds = \int_0^3 (x+x^5)^{\frac{1}{2}}(1+(y))^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \int_0^3 (x+x^5)^{\frac{1}{2}}(1+(x^4))^{\frac{1}{2}}dx$$

$$= \int_0^3 \sqrt{x}(1+x^4)dx$$

$$= \int_0^3 (\sqrt{x} + x^{\frac{9}{2}})dx$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{11}x^{\frac{11}{2}}\right)\Bigg|_0^3 = \left(2 + \frac{2}{11}(3)^5\right)\sqrt{3}$$

$$= \frac{508\sqrt{3}}{11}$$

مثـــال 4

أوجد قيمة التكامل الخطي

$$\int_c y^2 sin^3 x\sqrt{1 + cosx^2} ds$$

حيث أن القوس $y = sinx$ من النقطة $(0,0)$ إلى $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

الحــل

$$\int_c y^2 sin^3 x\sqrt{1 + cosx^2} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^5 x\sqrt{1 + cosx^2})(\sqrt{1 + cosx^2})dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^5 x + sin^5 x cos^2 x)dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x \; d \; cosx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^4 x \; cos^2 x \; d \; cosx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos^2 x)^2 d \; cosx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos^2 x)cos^2 x \; d \; cosx$$

$$= -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2cos^2x + cos^4x)d\ cosx - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (cos^2x - 2cos^4x + cos^6x)d\ cosx$$

$$= -\left(cosx - \frac{2}{3}cos^3x + \frac{1}{5}cos^5x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{1}{3}cos^3x - \frac{2}{3}cos^5x + \frac{1}{7}cos^7x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{64}{105}$$

مثـــال 5

أوجد قيمة التكامل الخطي

$$\int_{c} (2x^2 + 3y^2 - xy)ds$$

حيث أن c القوس: $\left.\begin{array}{l} x = 3cost \\ y = 3sint \end{array}\right\}; 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

$$\int_{c} (2x^2 + 3y^2 - xy)ds$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (18cos^2t + 27sin^2t - 9sint\ cost)\sqrt{9sin^2t + 9cos^2t}dt$$

$$= 27\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (2cos^2t + 3sin^2t - sint\ cost)\ dt$$

$$= 27\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (2 + sin^2t - sint\ cost)dt$$

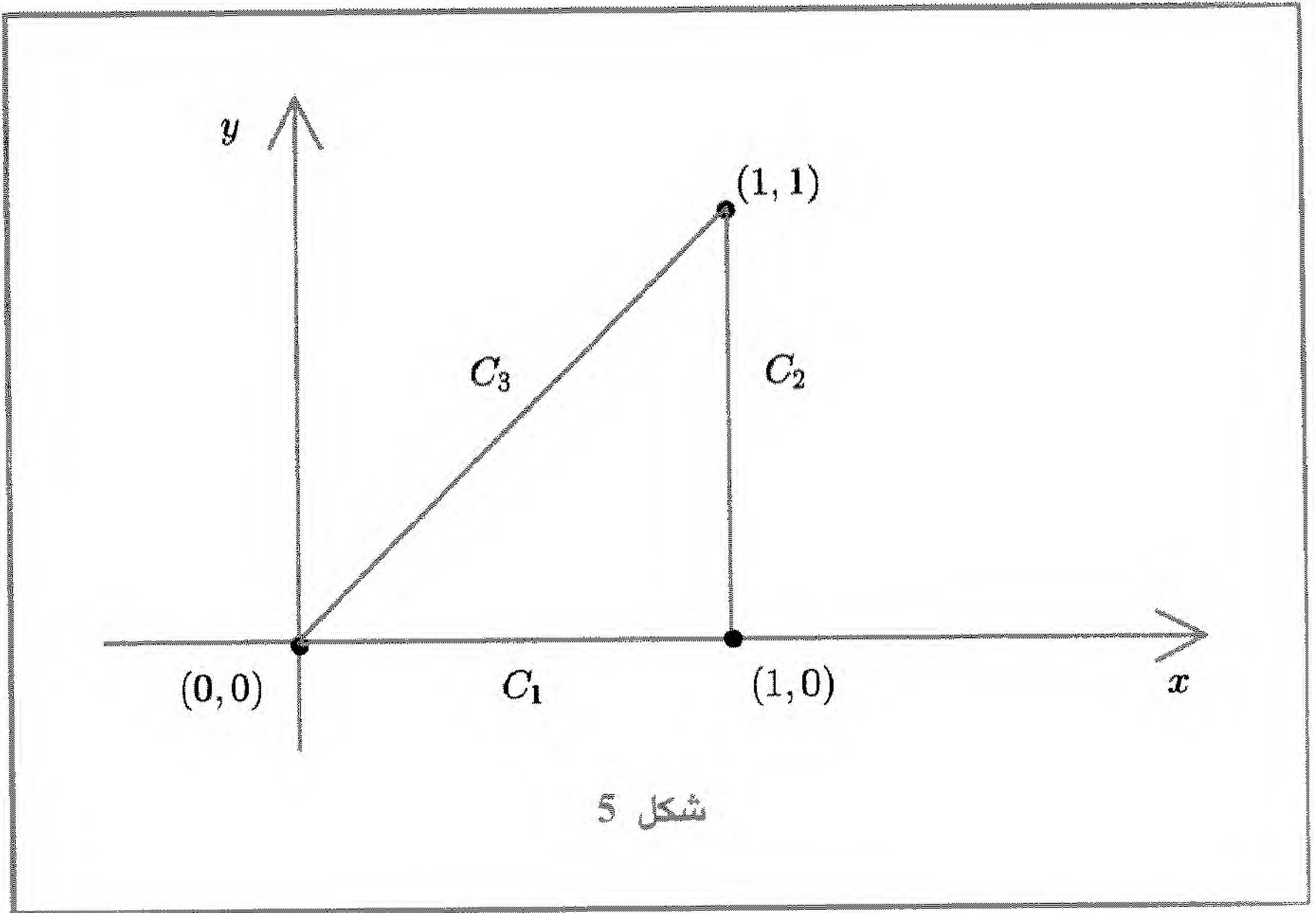
$$= 27\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\frac{5}{2} - \frac{1}{2}cos2t)dt - 27\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} sint\ d\ sint$$

$$= 27\left(\frac{5\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) - 27\left(\frac{1}{4}\right) = 27\left(\frac{5\pi}{8} - \frac{1}{2}\right)$$

مثـــال 6

أوجد $\int_c [(x+4y)dx + (x^3 - y^3)dy]$

حيث أن القوس c يتكوّن من المستقيم c_1 من النقطة $(0,0)$ إلى النقطة $(1,0)$ والمستقيم c_2 من النقطة $(1,0)$ إلى النقطة $(1,1)$ كما هو موضّح بالشكل 4..5



شكل 5

الحـــل

على المستقيم c_1 يكون $x = x$ و$y = 0$ وهذا يتضمن $dy = 0$.

وبذلك

$$\int_c [(x+4y)dx + (x^3 - y^3)dy] = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

وعلى المستقيم c_2 يكون $x = 1$ وهذا يتضمن $dx = 0$ و $y = y$

وبذلك

$$\int_c [(x+4y)dx + (x^3 - y^3)dy] = \int_0^1 (1 - y^3)dy = \left(y - \frac{1}{4}y^4\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{4}$$

وهكذا

$$\int_c [(x+4y)dx + (x^3 - y^3)dy] = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

مثـــال 7

أوجد قيمة التكامل الخطي في المثال السابق على المستقيم c_3 كما هو موضّح بالشكل (5).

الحـــل

على المستقيم c_3 يكون $y = x$ وبذلك

$$\int_c [(x+4y)dx + (x^3 - y^3)dy] = \int_0^1 5x dx = \frac{5}{2}x^2\Big|_0^1 = 2.5$$

تمارين 2.4

أوجد قيمة التكاملات الخطية التالية

1) $\int_c 6x^2 y dx + xy dy$

حيث أن c رسم المعادلة $y = x^3 + 1$ من النقطة $(-1,0)$ إلى $(1,2)$.

2) $\int_c xy dx + x^2 y^3 dy$

حيث أن c رسم المعادلة $x = y^3$ من النقطة $(-1,-1)$ إلى $(1,1)$.

3) أوجد قيمة التكامل الخطي

$$\int_c (x^2+y^2)dx + 2xdy$$

لكل المنحنيات التالية c من النقطة $(1,8)$ إلى $(-2,8)$.

أ) مستقيم من النقطة $(1,2)$ إلى $(1,8)$ ومن $(1,8)$ إلى $(-2,8)$.

ب) مستقيم من النقطة $(1,2)$ إلى $(-2,8)$.

جـ) رسم المعادلة $y=2x^2$ من النقطة $(1,2)$ إلى $(-2,8)$.

4) أوجد قيمة التكامل الخطي

$$\int_c (xy+z)ds$$

حيث أن المعادلات البارامترية للقوس c:

$$\left.\begin{aligned} x &= acost \\ y &= asint \\ z &= bt \end{aligned}\right\}; 0 \le t \le 2\pi$$

5) أوجد قيمة التكامل الخطي

$$\int_c [(x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy]$$

حيث أن القوس c:

$$\left.\begin{aligned} x &= t^2+3 \\ y &= t-1 \end{aligned}\right\}; 1 \le t \le 2$$

6) أوجد قيمة التكامل الخطي

$$\int_c \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-y^2}}dx + \frac{2y}{4x^2+y^2}dy\right)$$

حيث أن القوس c يقع على القطع المكافىء $y=\frac{1}{2}x^2$ من $(0,0)$ إلى $(2,2)$.

7) أوجد

$$\int_c [(x-y+z)dx+(y+z-x)dy+(z+x-y)dz]$$

حيث أن القوس c يتكوّن من المستقيمات الواصلة بين النقاط الآتية:

$(2,3,1)$ و $(2,3,2),(2,-1,2),(1,-1,2)$

8) أوجد

$$\int_c \frac{ydx+xdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

حيث أن c المنحنى المغلق

$$\left.\begin{matrix} x=cost \\ y=sint \end{matrix}\right\}; -\pi \leq t \leq \pi$$

9) أوجد قيمة التكامل الخطي

$$\int_c xzdx+(y+z)dy+xdz$$

والمعادلات البارامترية للقوس c :

$0 \leq t \leq 1$ حيث $x=e^{2t}, y=e^{-t}, x=e^t$

10) أوجد قيمة التكامل الخطي

$$\int_c xy\ z\ ds$$

حيث أن المستقيم من النقطة $(0,0,0)$ إلى $(1,2,3)$.

11) أوجد قيمة التكامل الخطي

$$\int_c (x+y+z)dx + (x-2y+3z)dy + (2x+y-z)dz$$

لكل المنحنيات الآتية من النقطة $(0,0,0)$ إلى ص(2,3,4)

أ) القوس c يتكوّن من ثلاثة مستقيمات (أجزاء) الأول موازٍ لمحور x، الثاني موازٍ لمحور y، والثالث موازٍ لمحور z.

ب) القوس c يتكوّن من ثلاثة مستقيمات (أجزاء) الأول موازٍ لمحور z، الثاني موازٍ لمحور x، والثالث موازٍ لمحور y.

3.4 استقلال التكامل الخطي عن المسار

قيمة التكامل الخطي تعتمد على ما يأتي:

1 ـ الدالة المكاملة

2 ـ نقطتا نهاية التكامل A وB

3 ـ المسار أو القوس الذي يربط بين النقطتين A و B

وعندما يعتمد التكامل الخطي على (1) و(2) فقط نقول إن قيمة التكامل الخطي مستقلة عن المسار.

نظرية 2

نفرض أن

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

تفاضل تام (Exact differential) أي أنه توجد دالة $f(x,y)$ حيث أن

$$\mathrm{df} = \mathrm{P\ dx} + \mathrm{Q\ dy}$$

وإذا كان القوس c على الصورة البارامترية التالية:

$$t_0 \leq t \leq t_1, y = y(t), x = x(t)$$

وإذا كانت $\dot{x}(y)$ و $\dot{y}(t)$ متصلتين، فإن:

$$\int_c (Pdx + Qdy) = f[x(t_1), y(t_1)] - f[x(t_0), y(t_0)]$$

أي أن التكامل الخطي يعتمد على نقطتي النهاية A وB وليس على القوس c الذي يربط بينهما.

البرهان

نفرض أن $F(t) = f[x(t), y(t)]$ حيث $t_0 \leq t \leq t_1$

وباستخدام قاعدة السلسلة

$$\dot{F}(t) = f_x \dot{x}(t) + f_y \dot{y}(t)$$

وبالتعويض في المعادلة

$$df = Pdx + Qdy$$

نجد أن:

$$\dot{F}(t) = P[x(t), y(t)]\dot{x}(t) + Q[x(t), y(t)]\dot{y}(t)$$

وبتكامل الطرفين بالنسبة للمتغير t وبتطبيق النظرية (1):

$$F(t_1) - F(t_0) = \int_c Pdx + Qdy$$

ولكن $F(t_1) = f[x(t_1), y(t_1)]$ و $F(t_0) = f[x(t_0), y(t_0)]$

نظرية 3

إذا كان $Pdx + Qdy + Rdz$ تفاضلاً تاماً، فإن:

$$\int_c (Pdx + Qdy + Rdz) = f[x(t_1), y(t_1), z(t_1)] - f[x(t_0), y(t_0), z(t_0)]$$

حيث أن المعادلة البارامترية للقوس c:

$$t_0 \leq t \leq t_1, z = z(t), y = y(t), x = x(t)$$

والمشتقات $\dot{z}(t), \dot{y}(t), \dot{x}(t)$ متصلة.

ويمكن برهان هذه النظرية بطريقة مشابهة للنظرية السابقة وتترك التفاصيل للقارىء.

مثـال 1

بيِّن أن الدالة التكاملية تفاضل تام ثم أوجد قيمة التكامل الخطي

$$\int_c (e^x cos\ y\ dx - e^x sin\ y\ dy)$$

حيث أن c أي قوس من النقطة $(1,0)$ إلى $(0,1)$.

الحـل

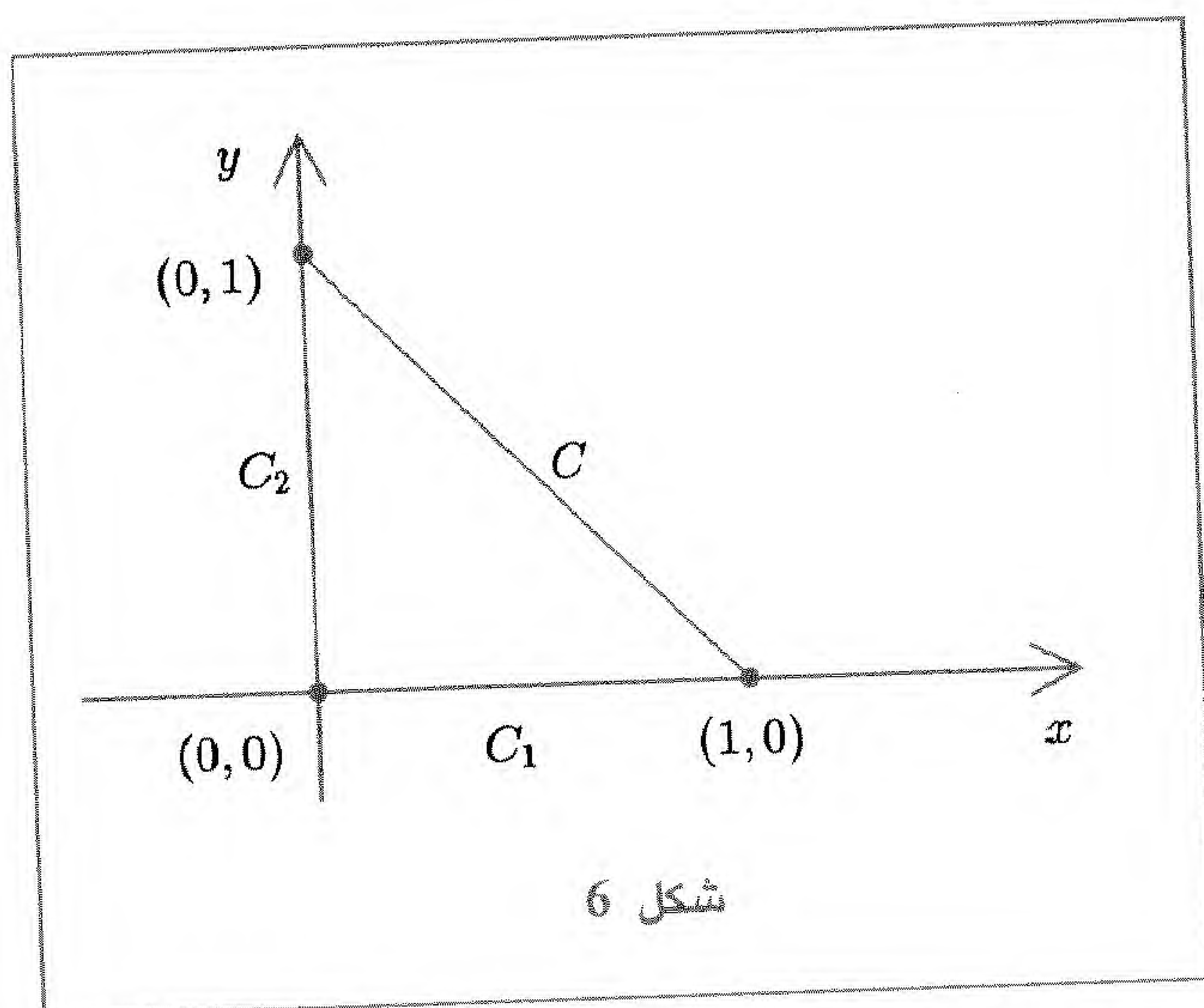
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -e^x sin\ y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

وبما أن التكامل مستقل عن المسار، إذن التكامل على القوس c يساوي التكامل على المستقيم c_1 زائد التكامل على المستقيم c_2 على المستقيم $c_1: x = x$ و$y = 0$.

أي أن:

$$\int_a 1(e^x cosydx - e^x cosydy) = \int_1^0 e^x dx = e^x\Big|_1^0 = -e$$

على القوس c_2: $x = 0$ و $y = y$.



شكل 6

أي أن:

$$\int_{c_2} (e^x cosydx - e^x sinydy) = -\int_0^1 sinydy = cosy\Big|_0^1 = cos(1) - 1$$

وبذلك

$$\int_c (e^x cosydx - e^x sinydy) = 1 - e + cos(1) - 1$$
$$= -e + cos(1)$$

مثـــال 2

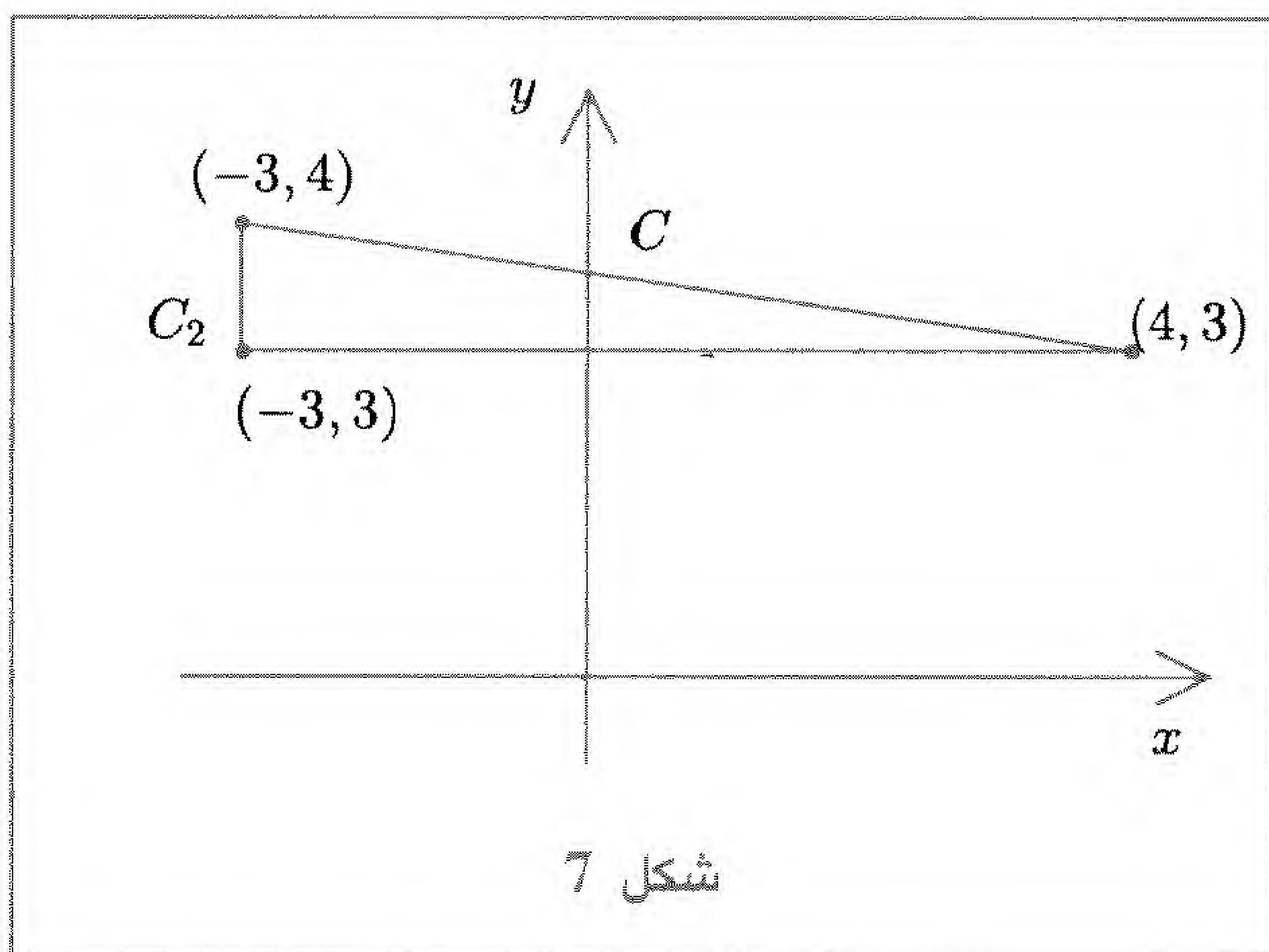
بيّن أن الدالة التكاملية تفاضل تام، ثم أوجد قيمة التكامل الخطي

$$\int_c \left[\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx - \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy\right]$$

حيث أن c أي قوس من $(4,3)$ إلى $(-3,4)$ ولا يمر بنقطة الأصل.

الحـــل

ليس من الصعب على القارىء أن يبيّن:



شكل 7

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y(2x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

على القوس c_1 : $x = x, y = 3$

ولذلك يكون التكامل الخطي:

$$= \int_4^{-3} = \frac{9}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}dx$$

ولإيجاد قيمة التكامل نفرض أن $x = 3tan\ u$ وهذا يتضمن $dx = 3sec^2u\ du$ ولذلك

$$\int \frac{9}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{sec^2u}{sec^3u} du$$

$$= \int cosudu$$

$$= sin\ \left(tan^{-1}\frac{x}{3}\right)\Bigg|_4^{-3}$$

$$= sin\ (tan^{-1}(-1)) - sin\left(tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{4}{5}$$

وعلى المستقيم c_2: $x = -3$ و $y = y$.

أي أن التكامل الخطي يختزل إلى:

$$\int_3^4 \frac{3y}{(y^2+9)^{\frac{3}{2}}} dy = -3(y^2+9)^{-\frac{1}{2}}\Bigg|_3^4$$

$$= 3\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

وهكذا

$$\int_c \left[\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dx - \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dy\right]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{4}{5} - \frac{3}{5} + \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{7}{5}$$

مثـــال 3

بيّن أن الدالة التكاملية تفاضل تام، ثم أوجد قيمة التكامل الخطي

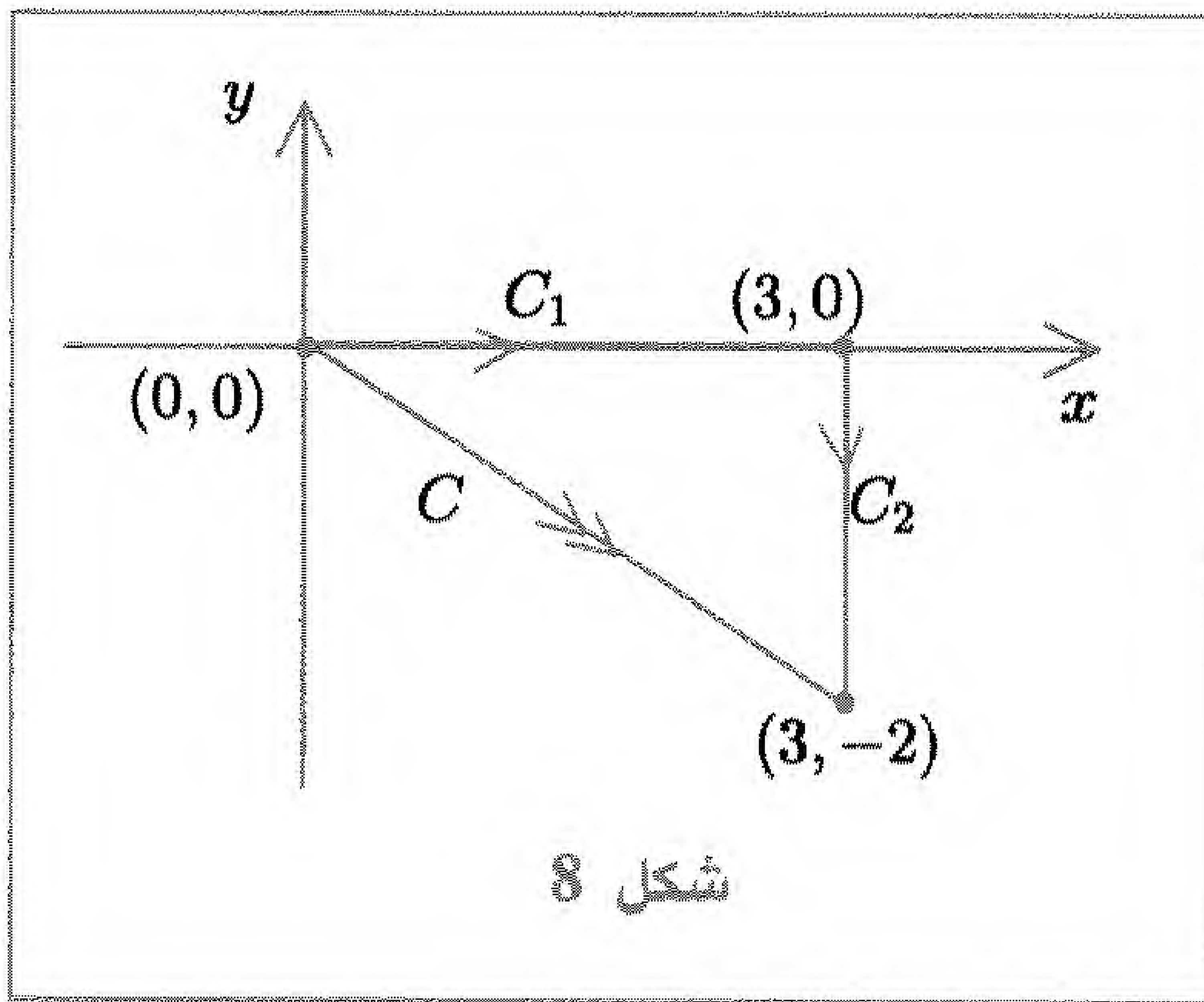
$$\int_c \{[ye^{xy}(\cos xy - \sin xy) + \cos x]dx + [xe^{xy}(\cos xy - \sin xy) + \sin y]dy$$

حيث أن c أي قوس من النقطة $(0,0)$ إلى $(3,-2)$.

الحـل

يترك الجزء الأول كتمرين للقارىء.

ولإيجاد قيمة التكامل الخطي نلاحظ أن:



شكل 8

1 ـ قيمة التكامل الخطي على c_1

حيث أن $x = x$ و $y = 0$

ولذلك فإن التكامل الخطي يختزل إلى:

$$\int_0^3 \cos x\, dx = \sin 3$$

2 ـ قيمة التكامل الخطي على c_2: $x = 3$ و $y = y$

التكامل يختزل إلى:

$$\int_0^{-2} \left[3e^{3y}(\cos 3y - \sin 3y) + \sin y\right] dy$$

ويمكن استخدام التكامل بالتجزيء لإيجاد قيمة التكامل الأخير.

ونترك للقارىء أن يبين أن قيمة التكامل هي $e^{-6}\cos 6 - \cos 2$

وبذلك قيمة التكامل الخطي على القوس c تكون:

$$\sin 3 - \cos 2 + e^{-6}\cos 6$$

مثـــال 4

إذا كان $\vec{F}(x,y,z) = y^2 cosx i + (2ysinx + e^{2z})j + 2ye^{2z}k$

فبين أن:

$$\int_c F.dr$$

مستقل عن المسار، وأوجد دالة الجهد f للمجال المتجه $\vec{F}$ وأوجد قيمة التكامل الخطي حيث أن c أي منحنى من النقطة $\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$ إلى $\left(\frac{\pi}{2},3,2\right)$.

الحــل

التكامل الخطي مستقل عن المسار إذا وجدت دالة f قابلة للتفاضل حيث أن:

$$\nabla f(x,y,z) = \vec{F}(x,y,z)$$

أي أن

$$f_x = y^2 cosx$$

$$f_y = 2ysinx + e^{2z}$$

$$f_z = 2ye^{2z}$$

وبتكامل f_x بالنسبة للمتغير x:

$$f(x,y,z) = y^2 sinx + g(y,z)$$

وبتفاضل الدالة $f(x,y,z)$ بالنسبة للمتغير y:

$$f_y = 2ysinx + g_y(y,z)$$

ولكن $f_y = 2ysinx + e^{2z}$

وبذلك $g_y(y,z) = 0$ وهذا يعني أن $g_y(y,z) = e^{2z}$

أي أن $g(y,z) = ye^{2z} + k(z)$

حيث أن k دالة في z فقط.

وبناء على ذلك

$$f(x,y,z) = y^2 sinx + ye^{2z} + k(z)$$

وبالتفاضل بالنسبة للمتغير z وباستخدام المعادلة للدالة f_z:

$$2ye^{2x} + k(z) = 2ye^{2z}$$

أي أن $k(z) = c_1$ حيث c_1 مقدار ثابت.

وقيمة التكامل الخطي هي:

$$\int_c \vec{F}.dr = y^2 sinx + ye^{2z}\Big|_{(0,1,\frac{1}{2})}^{(\frac{\pi}{2},3,2)}$$

$$= 9 + 3e^4 - e$$

مثـــال 5

أوجد قيمة التكامل الخكي

$$\int_c [(yze^{xyz} cos\ x - e^{xyz} sin\ x + ycos\ xy + zsin\ xz)dx$$

$$+(xze^{xyz} cos\ x + xcos\ xy)dy + (xye^{xyz} cos\ x + xsin\ xz)dz]$$

حيث أن c قوس من النقطة $(0,0,0)$ إلى النقطة $(-1,-2,-3)$

الحـــل

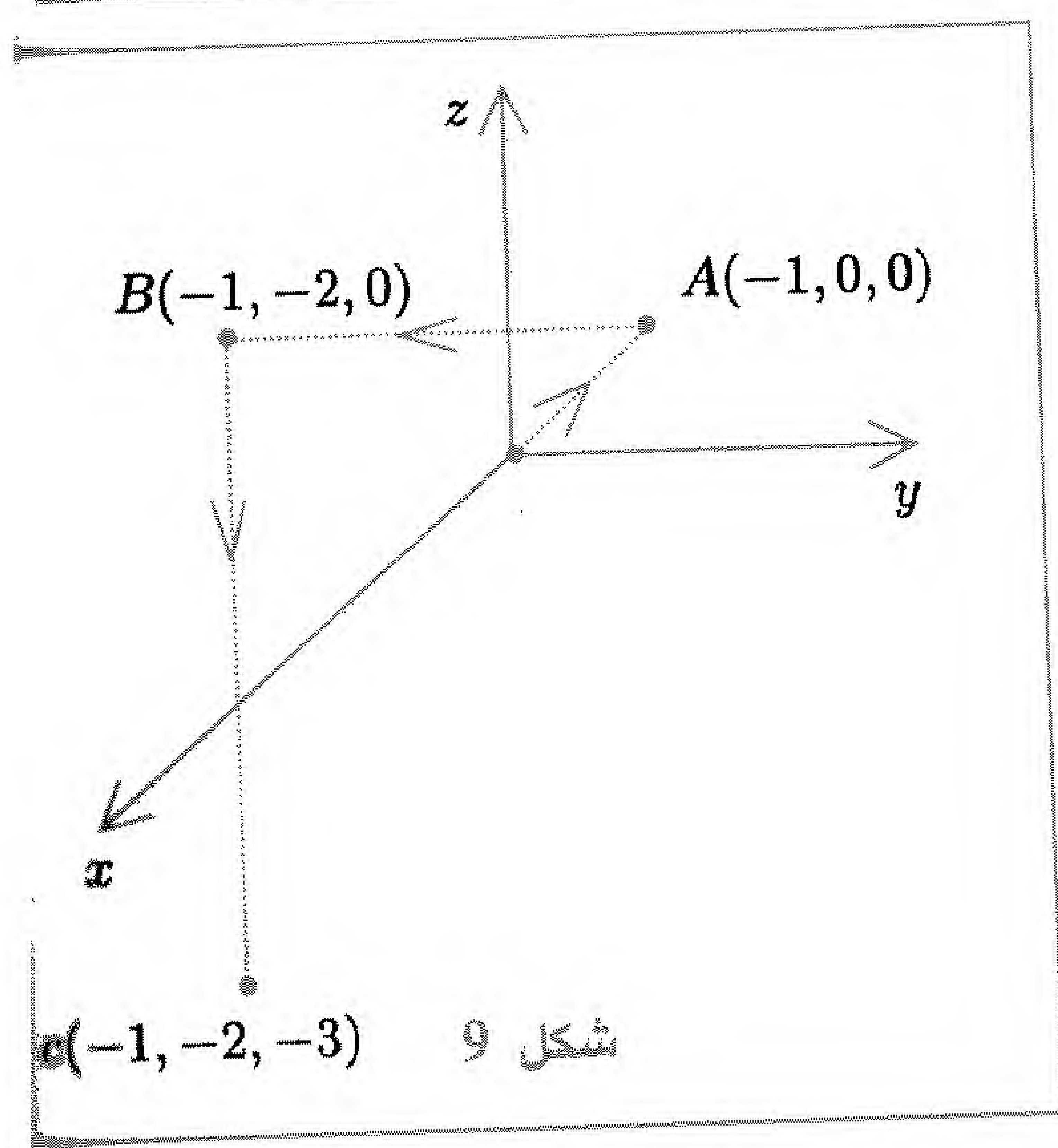
يترك للقارىء أن يبين استقلالية التكامل الخطي عن المسار.

وبما أن التكامل الخطي مستقل عن المسار، نوجد قيمة التكامل الخطي على المسار الموضح بالشكل (9) على المسار OA.

$x = x$ و $y = z = 0$ وهكذا فالتكامل الخطي يختزل إلى

$$\int_0^{-1} -sinxdx = cosx\Big|_0^{-1} = cos(1) - 1 \qquad (1)$$

على المسار AB



شكل 9

$z = z, y = y, x = -1$

وهكذا فالتكامل الخطي يختزل إلى

$$\int_0^{-1} (-\cos y)dy = -\sin y\Big|_0^{-2} = \sin 2 \quad (2)$$

وعلى المسار BC:

$z = z, y = -2, x = -1$

وبذلك

$$\int_0^{-3} (2e^{2z}\cos(1) + \sin z)dz = e^{2z}\cos(1) - \cos z\Big|_0^{-3}$$

$$= e^{-6}\cos(1)(3) - (\cos(1) - 1)$$

$$= e^{-6}\cos(1) - \cos(3) - \cos(1) + 1 \quad (3)$$

وبجمع (1) و(2) و(3) نجد أن قيمة التكامل الخطي من النقطة $(0,0,0)$ إلى النقطة $(-1,-2,-3)$ تساوي:

$$e^{-6}\cos(1) - \cos(3) + \sin 2$$

مثال 6

أوجد حل المثال السابق بطريقة أخرى.

الحل

بما أن الدالة التكاملية تفاضل تام حيث أن:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y\ z\ e^{xyz}\cos\ x - e^{xyz}\sin\ x + y\ \cos\ x\ y\ + z\ \sin\ x\ z$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x\ z\ e^{xyz} cos\ x + cos\ x\ y$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = x\ y\ e^{zyx} cos\ x + x\ sin\ x\ z$$

وليس من الصعب على القارىء أن يبين:

$$F(x,y,z) = e^{xyz} cos\ x - cos\ x\ z + sin\ y$$

وهكذا فإن قيمة التكامل الخطي تساوي:

$$F(x,y,z)\Big|_{(0,0,0)}^{(-1,-2,-3} = \left(e^{xyz} cos\ x - cos\ x\ z + sin\ x\ y\right)\Big|_{(0,0,0)}^{(-1,-2,-3)}$$

$$= e^{-6} cos(3) - cos(3) + sin(2)$$

تمارين 3.4

في التمارين من 1 إلى 5 بيّن ما إذا كان $\int_c \vec{F}.dr$ مستقلاً عن المسار، وإذا كان كذلك فأوجد دالة الجهد f للمجال المتجه $\vec{F}$.

1) $\vec{F}(x,y) = (3x^2y + 2)i + (x^3 + 4y^3)j$.

2) $\vec{F}(x,y) = (6x^2 - 2xy^2)i + (2x^2y + 5)j$.

3) $\vec{F}(x,y) = y^3 cos\ xi - 3y^2\ sin\ xj$.

4) $\vec{F}(x,y,z) = (y\ sec^2 x - ze^x)i + tan\ x\ j$.

5) $\vec{F}(x,y,z) = e^{-z}i + 2yj + xe^{-z}k$

بيّن أن التكاملات الخطية التالية مستقلة عن المسار وأوجد قيمة كل منها.

6) $\int_c (y^2 + 2xy)dx + (x^2 + 2xy)dy$ حيث c أي منحنى من $(-1,2)$ إلى $(3,1)$.

7) $\int_c (6xy^3+2z^2)dx+9x^2y^2dy+(4xz+1)dz$.

حيث أن c أي منحنى من $(1,0,2)$ إلى $(-2,1,3)$.

8) $\int_c (yz+1)dx+(xz+1)dy+(xy+1)dz$.

حيث أن c أي منحنى من $(4,0,3)$ إلى $(-1,1,2)$.

9) إذا كان $\vec{F}r(x,y)=P(x,y)i+Q(x,y)j$

حيث أن $P(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ و $Q(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

فبين أن $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ لكل قيم x و y في النطاق D للمجال $\vec{F}$ ولكن $\int_c \vec{F}.dr$ غير مستقل عن المسار في D. فسر ذلك.

أوجد قيمة التكاملات الخطية التالية:

10)

$$\int_c [(yze^{xyz}\ cosx-e^{xyz}\ sinx+ycos\ xy+zsin\ xz)dx$$
$$+(xze^{xyz}cos\ x+xcos\ yx)dy+(xy\ ey^{xyz}cos\ x+x\ sin\ xz)dz]$$

حيث أن c أي قوس من النقطة $(0,0,0)$ إلى $(-1,-2,-3)$.

11) $\int_c [\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dx+\dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}dy]$

حيث أن B أي قوس من $(-2,-2)$ إلى $(4,1)$.

12) $\int_c [(3x^2-3yz+2xz)dx+(3y^2-3xz+z^2)dy$.
$+(3z^2-3xy+x^2+2yz)dz]$

حيث أن c أي قوس من $(-1,2,3)$ إلى $(3,2,-1)$

4.4 الشغل (Work)

أحد تطبيقات التكامل الخطي هو إيجاد الشغل الناتج من تأثير قوة على جسيم متحرك في مسار معين.

القاعدة الأساسية تعتمد على الفكرة البسيطة التالية:

إذا كانت القوة F ثابتة وإذا كانت المسافة التي قطعها الجسيم (على خط مستقيم) d فإن الشغل w يعطى بالعلاقة التالية:

$$w = Fd$$

وحركة الجسيم في المستوى تكون كمية متجهة، وتكتب القوة $\vec{F}$ على الصورة التالية:

$$\vec{F} = Pi + Qj$$

نفرض أن الجسيم يتحرك في اتجاه الخط المستقيم L، وإذا كانت الحركة ناتجة عن القوة F فإن مركبة F في اتجاه L هي الجزء الوحيد الذي يؤثر على الحركة.

وتسمى المركّبة السابقة إسقاط (Projection) القوة $\vec{F}$ على المستقيم L ويعطى بالعلاقة التالية:

$$|\vec{F}| cos\theta$$

حيث أن θ الزاوية بين اتجاه $\vec{F}$ وL.

وإذا كانت المسافة التي قطعها الجسيم تساوي d وإذا كانت القوة F مقداراً ثابتاً فإن الشغل (work):

$$W = |F| cos\theta . d$$

ويمكن تمثيل العلاقة السابقة بطريقة أخرى:

إذا كان طول المتجه $\vec{r}$ في اتجاه L يساوي d، فإنه يمكن كتابة

$$|\vec{r}| = d$$ و

$$W = F.r \qquad (1)$$

حيث أن المتجه r له طول ملائم في اتجاه الحركة.

وباعتبار العلاقة الأخيرة كقاعدة أساسية للحركة في المستوى، وإذا كانت القوة F متغيرة.

$$\vec{F} = P(x,y)i + Q(x,y)j$$

والحركة على مسار منحنى فإنه يمكن تعريف الشغل كما يأتي:

نفرض أن الجسيم يتحرك على طول القوس c ونفرض أن حركة الجسيم تسببها القوة $\vec{F}$ حيث أن المعادلات البارامترية للقوس c:

$$a \leq t \leq b, y = y(t), x = x(t)$$

وبتجزئة الفترة $a \leq t \leq b$ كما يأتي:

$$a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n < b$$

وبذلك نحصل على التقسيم الجزئي (Subdivision)

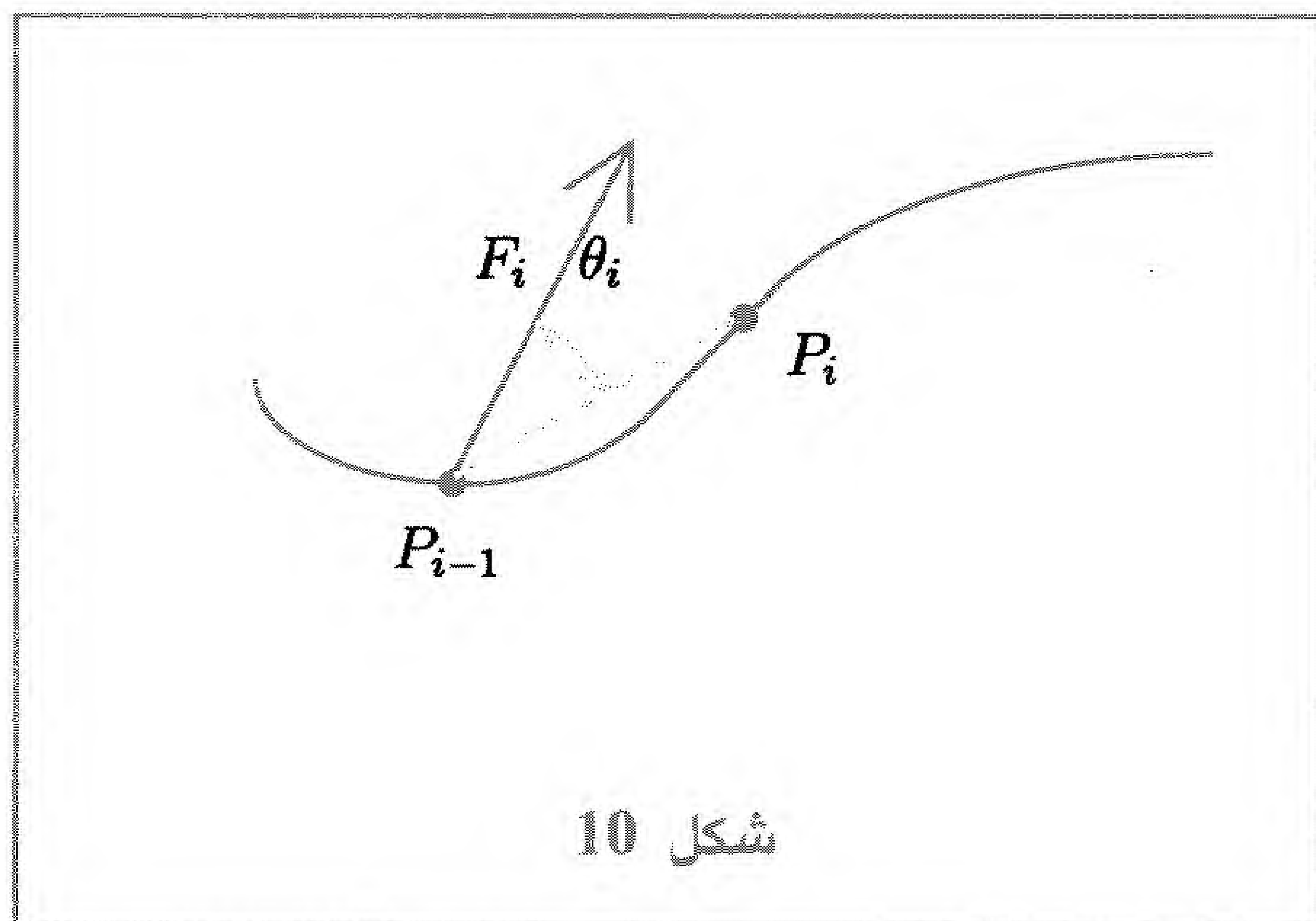
$$P_0, P_1, P_2, ..., P_{n-1}, P_n$$

للقوس c.

ونعتبر كل قوس جزئي (subarc) مستقيماً ونفرض أن القوة ثابتة على كل قوس جزئي وإذا رمزنا للقوس الجزئي (P_{i-1}, P_i) بالرمز (i) وللقوة على هذا القوس الفرعي بالرمز F_i فإن القيمة التقريبية

$$W_i = |F_i| cos\theta_i \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2}$$

أنظر الشكل (10).



شكل 10

وإذا اعتبرنا المتجه

$$(\Delta x_i)i + (\Delta y_i)j$$

و

$$F_i = P_i i + Q_i j$$

وباستخدام المعادلة (1)

فإن الشغل

$$W_i = P_i \Delta x_i + Q_i \Delta y_i$$

والشغل الكلي يساوي مجموع كميات الشغل على الأقواس الفرعية.

أي أن:

$$W = \sum_{i=1}^{n} P[x(t_i), y(t_i)]\Delta x_i + Q[x(t_i), y(t_i)]\Delta y_i$$

وبذلك يمكن تعريف الشغل الكلي كما يأتي:

$$W = \int_c (Pdx + Qdy)$$

وإذا كانت حركة الجسيم في ثلاثة أبعاد حيث أن:

$$\vec{F} = P(x,y,z)i + Q(x,y,z)j + R(x,y,z)k$$

فإن

$$W \int_c (Pdx + Qdy + Rdz)$$

مثـــال 1

أوجد الشغل الناتج من تأثير القوة

$$F(x,y) = -yi + xj$$

على القوس c من النقطة $(0,0)$ إلى $(3,9)$ حيث أن القوس c جزء من القطاع المكافىء $y=x^2$ بين النقطتين المذكورتين.

الحـل

$$W=\int_c(-ydx+xdy)$$

$$=\int_0^3 -x^2dx+x(2x)dx$$

$$=\int_0^3 x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^9=9$$

مثـال 2

جسيم يتحرك على المنحنى $y=x^3$ من النقطة $(1,1)$ إلى النقطة $(2,8)$، إذا كانت الحركة تحت تأثير القوة $F=(x^2-y^2)\,i+x^2yj$ فأوجد الشغل الكلي.

الحـل

$$W=\int_c(Pdx+Qdy)$$

$$=\int_1^2(x^2-x^6)dx+x^2(x^3)(3x^2dx)$$

$$=\int_1^2(x^2-x^6+3x^7)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{7}x^7+\frac{3}{8}x^8\right]\Big|_1^2$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{256}{7}+\frac{3}{8}(512)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{3}{8}\right)$$

$$=\frac{7}{3}-\frac{255}{7}+\frac{1533}{8}=157.530$$

مثال 3

إذا كانت c جزءاً من القطاع المكافىء $y = x^2$ بين $(0,0)$ و $(3,9)$ وإذا كانت

$$\vec{F}(x,y) = -y^2 i + xj$$

فأوجد الشغل الناتج عن تأثير $\vec{F}$ على القوس c من $(0,0)$ إلى $(3,9)$.

الحل

$$W = \int_c \vec{F}.d\vec{r} = \int_c -ydx + xdy$$

$$= \int_0^3 -(x^2)^2 dx + d(x^2)$$

$$= \int_0^3 (2x^2 - x^4)dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^3$$

$$= 18 - \frac{243}{5} = -\frac{153}{5}$$

تمارين 4.4

1) إذا كانت القوة عند النقطة (x,y)) هي

$$\vec{F} = xy^2 i + x^2 yj$$

فأوجد الشغل الناتج من تأثير القوة $\vec{F}$ على c حيث أن:

أ) c المستقيم من النقطة $(1,2)$ إلى $(-2,8)$.

ب) c رسم المعادلة $y = 2x^2$ من $(1,2)$ إلى $(-2,8)$.

2) إذا كانت $\vec{F}(x,y,z) = yi + zj + xk$

أوجد الشغل على المنحنى $x = t$، $z = t^2$ في النقطة $(0,0,0)$ إلى $(2,4,8)$

3) أوجد حل تمرين (2) إذا كانت

$$\vec{F}(x,y,z) = e^x i + e^y j + e^z k$$

4) إذا كانت

$$\vec{F}(x,y) = (x^2+y^2)i + xyi$$

فأوجد الشغل الناتج عن تأثير القوة $\vec{F}$ على المنحنى $y=x^3$ من النقطة $(0,0,0)$ إلى $(2,4,8)$.

5) إذا تحرك جسيم في المستوى xy على خط مستقيم من النقطة (a,b) إلى (b,c) تحت تأثير القوة.

$$\vec{F} = \frac{-x}{x^2+y^2} i - \frac{y}{x^2+y^2} j$$

فأوجد الشغل وبيّن أنه يمكن الحصول على النتيجة نفسها إذا تم اختيار مسار آخر بين النقطتين (المسار لا يمر بنقطة الأصل).

6) أجب عن التمرين (5) إذا كانت

$$\vec{F} = \frac{-x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} i + \frac{-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} j$$

7) جسيم يتحرك على مستقيم في ثلاثة أبعاد من النقطة $A(a,b,c)$ إلى $B(d,e,f)$ تحت تأثير القوة:

$$\vec{F} = \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} i - \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} j - \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} k$$

أوجد الشغل، وبيّن أنه يمكن الحصول على النتيجة نفسها إذا تم اختيار مسار آخر (المسار لا يمر بنقطة الأصل).

8) أجب عن السؤال (7) إذا كانت:

$$\vec{F} = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^2} i + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^2} j + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^2} k$$

تمارين الفصل الرابع

1) أوجد تدرج (Gradient) الدوال التالية:

أ) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{3}}$

ب) $d(x,y,z) = ln(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$

جـ) $g(x,y,z) = x(y+z)+yz$

2) أوجد الشغل (Work) المعمول بالقوة $\vec{F}$ من $(0,0,0)$ إلى $(1,1,1)$ على كل من المسارات التالية:

أ) المستقيم C_1 حيث أن $0 \leq t \leq 1, \vec{r}(t) = ti+tj+tk$

ب) المنحنى C_2 حيث أن $0 \leq t \leq 1, \vec{r}(t) = ti+t^2j+t^4k$

حيث أن:

$$\vec{F} = (3x^2-3x)i+3zj+k$$

و

$$\vec{F} = xyi+yzi+xzk$$

3) أوجد الشغل المعمول بالقوة $\vec{F}$ على المنحنى في اتجاه تزايد t حيث أن:

$$\vec{F} = 2yi+3xj+(x+y)k$$

$$\vec{r}(t) = (cost)i+(sint)j+\left(\frac{t}{6}\right)k, 0 \leq t \leq 2\pi$$

4) أوجد

$$\int_c xydx+(x+y)dy$$

على المنحنى $y = x^3$ من النقطة $(-1,-1)$ إلى $(2,8)$

5) أوجد $\int \vec{F}.d\vec{r}$ للمجال المتجه $\vec{F} = yi-xj$ عكس اتجاه عقارب الساعة على دائرة الوحدة $x^2+y^2=1$ من $(1,0)$ إلى $(0,1)$

6) أوجد الشغل المعمول بالتدرج للدالة $f(x,y) = (x+y)^2$ عكس اتجاه عقارب الساعة حول الدائرة $x^2+y^2=4$ من $(2,0)$ إلى النقطة نفسها.

7) أوجد $\int_c \vec{F}.dr$ حيث أن:

أ) $\vec{F} = xy^6 i + 3x(xy^5+2)j; r(t) = 2costi + sinj, 0 \le t \le 2\pi$

ب) $\vec{F} = (y + yz\ cos\ xyz)i + (x^2 + xz\ cos\ xyz)j + (z + xy\ cos\ xyz)k$

$$\vec{r}(t) = 2cos\ ti + 3sin\ tj + k, 0 \le t \ge 2\pi$$

جـ) $\vec{F} = (2y + \ sin\ x)i + (z^2 + \frac{1}{3}\ cos\ y)j + x^4 k,$

$$\vec{r}(t) = \ sin\ ti + \ cos\ tj + sin\ 2tk, -\pi/2 \le t \le \pi/2$$

8) أوجد دالة الجهد (Potential function) f للمجالات التالية:

أ) $\vec{F} = (y\ sin\ z)i + (x\ sin\ z)j + (xyz)k$

ب) $\vec{F} = (lnx - sec^2(x+y)i + \left(sec^2(x+y) + \frac{y}{y^2+z^2}\right)j + \frac{z}{y^2+z^2}k$

جـ) $\vec{F} = \frac{y}{1+x^2y^2}i + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} + \frac{z}{\sqrt{1-y^2-z^2}}\right)j + \left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2z^2}} + \frac{1}{z}\right)k$

9) أوجد قيمة التكاملات الخطية التالية:

أ) $\int_{(0,0,0)}^{(2,3,-6)} 2xdx + 2ydy + 2zdz$

ب) $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xy\ dx + (x^2 - z^2)dy - 2yz\ dz$

ج) $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \frac{1}{y}dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{y}{z^2}dz$

د) $\displaystyle\int_{(-1,-1,-1)}^{(2,2,2)} \frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{x^2 + y^2 + z^2}$

10) أوجد $\displaystyle\int_c 2xcosydx - x^2sinydy$ على المسارات التالية في المستوى xy

أ) القطع المكافىء $y = (x-1)^2$ من $(1,0)$ إلى $(0,1)$

ب) القطعة المستقيمة من $(-1,\pi)$ إلى $(1,0)$

جـ) $0 \le t \le 2\pi, \vec{r}(t) = (cos^3t)i + (sint)j$ عكس عقارب الساعة من $(1,0)$ إلى $(1,0)$.

11) بيّن أي التكاملات التالية مستقلة عن المسار وأوجد قيمتها

أ) $\displaystyle\int_{(-2,3,1)}^{(0,2,1)} (2x - yze^{xz})dx + e^{xz}dy + xye^{zx}dz$

ب) $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,3,4)} x^2dx + 6ydy - sin\ \pi z\ dz$

جـ) $\displaystyle\int_{(5,5)}^{(5,5)} \vec{F}.\ \vec{dr};\ \vec{F} = (e^{x+1},\ arctan\ y^3)$

د) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(2,1)} F.dr; \vec{F} = \left(\frac{1}{x}, 2x - 2y\right)$

12) أوجد $\displaystyle\int_c \vec{F}.dr$ حيث

$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

وC دائرة الوحدة $x^2 + y^2 = 1$

الفصل الخامس

بعض عناصر التفاضل والتكامل المتجه

1.5 نظرية جرين (Green's Theorem)

مقدمة

النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل تنص على أن التفاضل والتكامل عمليتان عكسيتان وتعميم هذه النظرية إلى التكامل الثنائي يعرف بنظرية جزين.

نفرض أن الدالتين $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ متصلتان وقابلتان للتفاضل ومعرّفتان في المنطقة R في المستوى xy.

المنحنى المغلق البسيط (Simple Closed Curve) هو المنحنى الذي يتكون من اتحاد قوسين مشتركين في نقطتي النهاية فقط.

والمنحنى المغلق البسيط يكون أملس (Smooth) إذا كانت معادلاته البارامترية على الصورة التالية:

$x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$ حيث أن $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ دوال متصلة.

و $[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)] > 0$ و $x(b) = x(a), \dot{x}(b) = \dot{x}(a)$

و $y(b) = y(a), \dot{y}(b) = \dot{y}(a)$

وإذا كان المنحنى c مغلقاً، بسيطاً وأملس ويقع بالكامل في المنطقة R فإن:

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint\limits_c (Pdx + Qdy)$$

حيث المنطقة G تقع داخل c.

القانون أو الصيغة السابقة يعرف بنظرية جرين.

نظرية تمهيدية 1

نفرض أن المنطقة G محددة بالمستقيمات $y = c, x = b, x = a$ وبالقوس الذي يقع فوق المستقيم $y = c$ ومعادلته $a \le x \le b, y = f(x)$ ونفرض أن الدالة f غير تناقصية أو غير تزايدية.

وإذا كانت $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ متصلتين وقابلتين للتفاضل في المنطقة التي تشتمل على G وحدودها، فإن:

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint\limits_{\partial G} (Pdx + Qdy)$$

حيث ∂G يرمز إلى حدود المنطقة G.

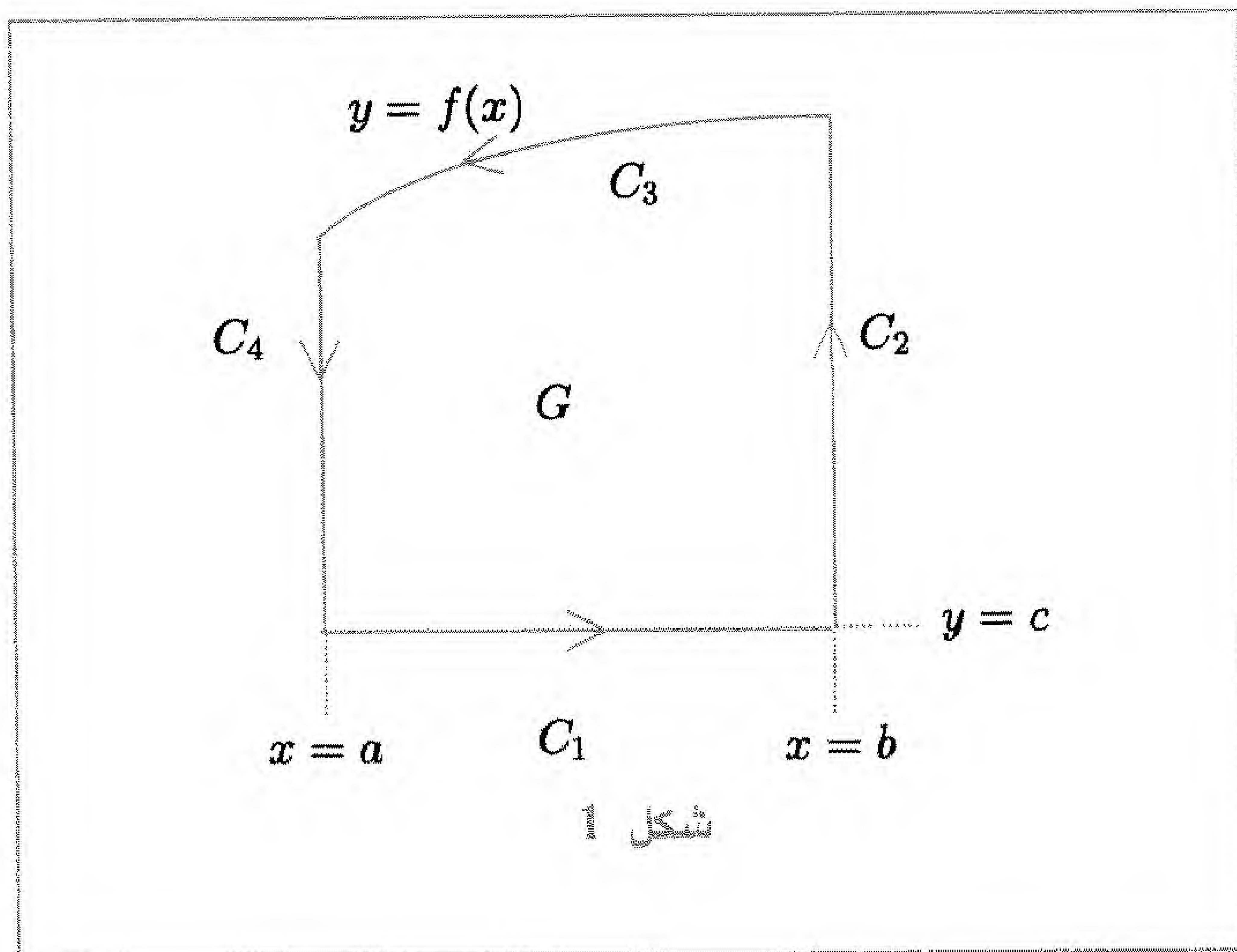
البرهان

يمكن برهان النظرية السابقة بإثبات الصيغتين التاليتين:

$$-\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y} dA = \int\limits_{\partial G} Pdx \qquad (1)$$

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x} dA = \int\limits_{\partial G} Qdy \qquad (2)$$

وللسهولة نفرض أن الدالة f غير تناقصية والمنطقة موضحة في الشكل (1).



شكل 1

برهان الجزء الأول

$$-\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dA = -\int_a^b \int_c^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy\, dx$$

$$= -\int_a^b \{P(x, f(x)) - P(x, c)\} dx$$

$$= \int_b^a P(x, f(x)) dx + \int_a^b P(x, c) dx$$

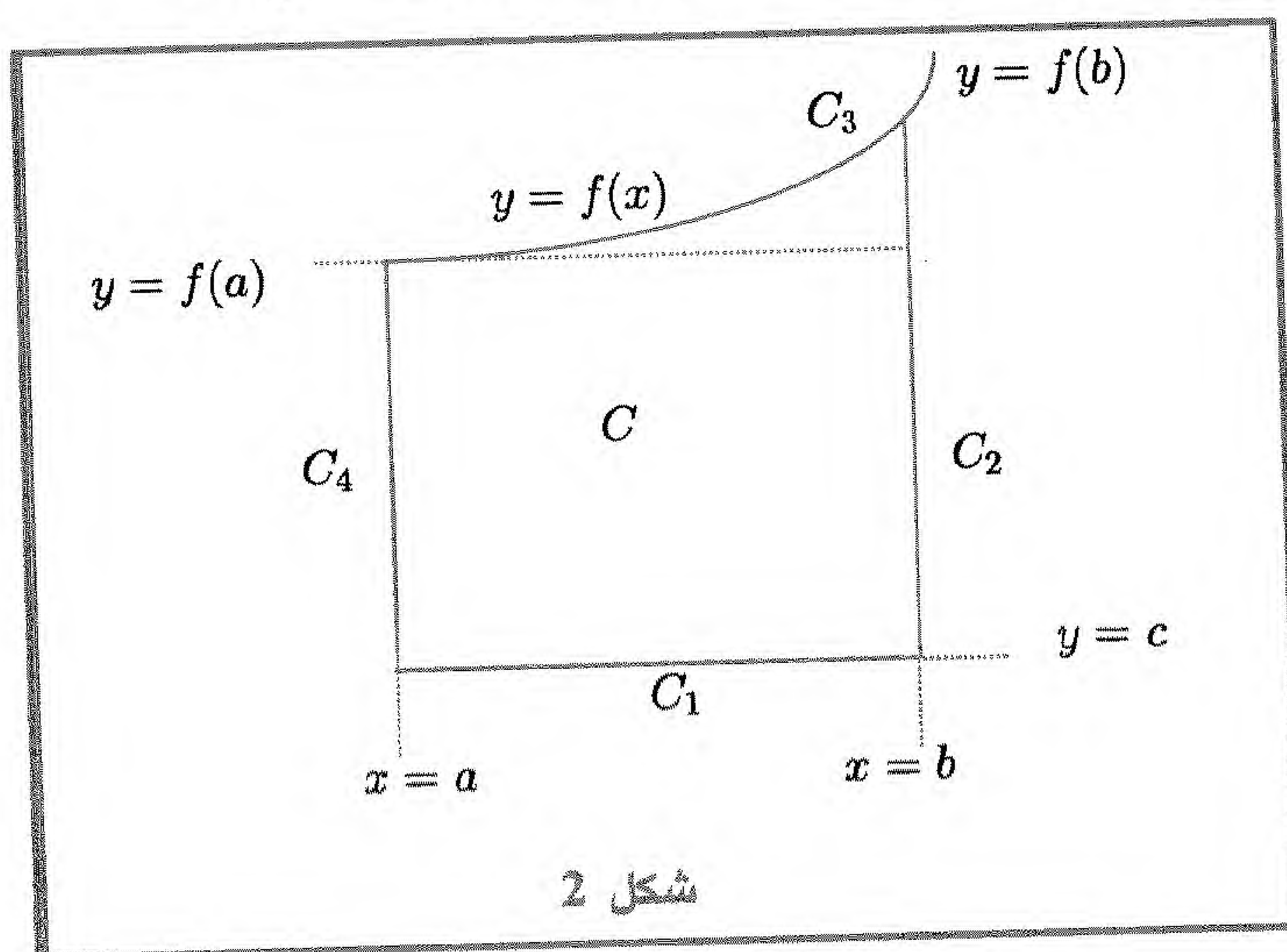
$$= \int_{c_3} P(x, y) dx + \int_{c_1} P(x, y) dx$$

وبما أن x مقدار ثابت على c_2 و c_4 فإن:

$$\int_{c_2} P dx = \int_{c_4} P dx = 0$$

وهكذا
$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dA = \int\limits_{(c_1+c_2+c_3+c_4)} Pdx = \oint\limits_{\partial G} Pdx$$

ولبرهان الجزء الثاني نفرض أن f تزايدية، أنظر الشكل (2).



شكل 2

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA = \int\limits_c^{f(a)}\int\limits_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy + \int\limits_{f(a)}^{f(b)}\int\limits_{f^{-1}(y)}^{b} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy$$

$$= \int\limits_c^{f(a)} [Q(b,y) - Q(a,y)]dy + \int\limits_{f(a)}^{f(b)} \{Q(b,y) - Q[f^{-1}(y),y]\}dy$$

$$= \int\limits_c^{f(a)} Q(b,y)dy + \int\limits_{f(a)}^{f(b)} Q(b,y)dy - \int\limits_c^{f(a)} Q(a,y)dy - \int\limits_{f(a)}^{f(b)} Q[f^{-1}(y),y]dy$$

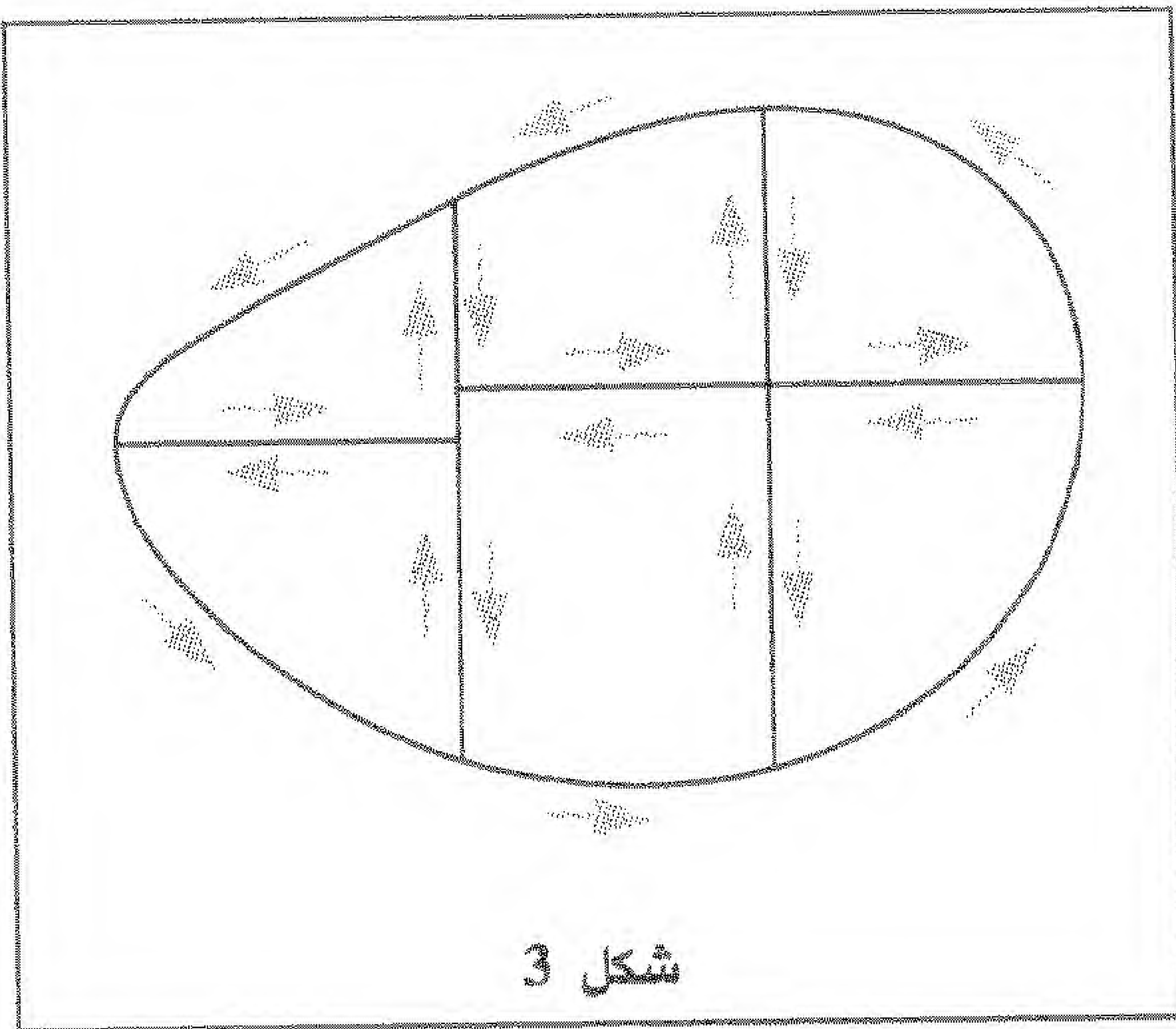
$$= \int\limits_c^{f(b)} Q(b,y)dy + \int\limits_{f(a)}^{c} Q(a,y)dy + \int\limits_{f(b)}^{f(a)} Q[f^{-1}(y),y]dy$$

$$= \int\limits_{c_2} Q(x,y)dy + \int\limits_{c_4} Q(x,y)dy + \int\limits_{c_3} Q(x,y)dy \qquad (3)$$

$$= \int_{(c_1+c_2+c_3+c_4)} Q(x,y)dy = \oint_{\partial G} Q(x,y)dy$$

لاحظ أن $\int_{c_1} Q(x,y)dy = 0$

وإذا كانت الدالة f غير تناقصية فإن الجزء الثاني من النظرية يكون صحيحاً لأن أي جزء من c_3 حيث تكون الدالة f أفقية لا يؤثر على التكامل.

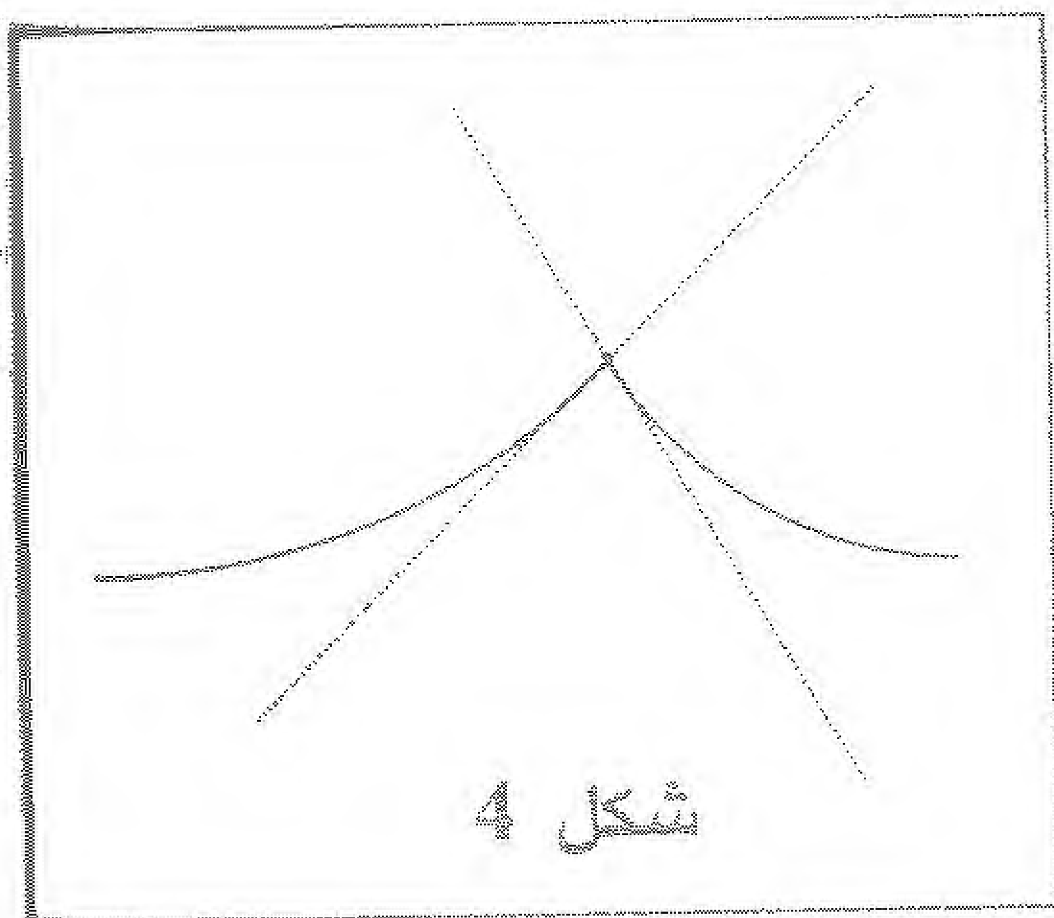


شكل 3

والنظرية التمهيدية (1) يمكن تعميمها على أي منطقة قابلة للتقسيم إلى عدد محدد من المناطق كل منها من النوع الذي اعتبر في النظرية (1) كما في الشكل 3.5 الذي يبين منطقة حدودها عبارة عن منحنى مغلق بسيط، متصل وقابل للتفاضل، المنطقة مقسمة بخطوط مستقيمة إلى عدد من المناطق تتوفر فيها الشروط المطلوبة. واضح أن التكامل الثنائي على المنطقة الكلية يساوي مجموع التكاملات الثنائية على المناطق الفرعية. وبجمع التكاملات الخطية نلاحظ أن التكاملات الخطية على المستقيمات الداخلية تلغي بعضها، لأن كل جزء عكس نفسه إذا اعتبر حداً لمنطقتين متجاورتين ولكن ليس كل منطقة يمكن تقسيمها إلى مناطق فرعية كما سبق.

ويكون المنحنى المغلق البسيط متصلاً وقابلاً للتفاضل مقطعياً إذا كان يتكون من عدد محدود من الأقواس المتصلة والقابلة للتفاضل وتتصل هذه الأقواس ببعضها عند نقاط تسمى زوايا (Corners). والزاوية هي نقاط اتصال أي قوسين متصلين وقابلين للتفاضل حيث مماساهما يصنعان زاوية موجبة، أنظر الشكل (4).

ولذلك يمكن استخدام النظرية التمهيدية (1) لكل منطقة تتكون حدودها من منحنى مغلق بسيط متصل وقابل للتفاضل مقطعياً.


شكل 4

وتقدم فيما يلي نظرية جرين في صورتها العامة لمعظم التطبيقات.

نظرية جرين (Green's Theorem)

إذا كانت حدود المنطقة G تتكون من عدد نهائي من المنحنيات البسيطة المغلقة، المتصلة والقابلة للتفاضل مقطعياً، ولا يتقاطع اثنان منهما. إذا كانت الدالتان $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ متصلتين وقابلتين للتفاضل ومعرّفتين في المنطقة التي تشتمل على المنطقة G وحدودها ∂G، فإن:

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \oint_{\partial G} (Pdx + Qdy) \qquad (1)$$

حيث أن التكامل في اليمين يعرف بأنه مجموع التكاملات على المنحنيات الحدودية ويتجه كل منهما بحيث يجعل المنطقة G في يساره.

الصيغة المتجهة لنظرية جرين

إذا كان المجال المتجه

$$\vec{F} = P(x,y)i + Q(x,y)j$$

متصلاً ومعرّفاً في المنطقة البسيطة R في المستوى xy وإذا كان اتجاه حدود R عكس اتجاه عقارب الساعة فإن:

$$\int_{\partial R} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\partial R} F.dr$$

والإلتفاف يكون

$$curl\vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)k$$

وهكذا

$$(curl\vec{F}).k = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.k = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

ويمكن الآن كتابة صيغة نظرية جرين كما يلي:

$$\oint_{\partial G} F.dr = \int\int_G (curl\vec{F}).kdA$$

نظرية جرين يمكن استخدامها في اشتقاق صيغة لحساب مساحة منطقة ولتكن R محدودة بمنحنى مغلق بسيط وناعم مقطعياً وليكن C.

إذا كانت $P = 0$ و $Q = x$ فإن (1) تختزل إلى الصيغة التالية

$$\iint_R dA = \oint x\, dy \qquad (3)$$

كذلك إذا كانت $P = y$ و $\phi = 0$ فإن (1) تؤدي إلى الصيغة التالية:

$$A = \iint_R dA = -\oint_C ydx \qquad (4)$$

وبجمع المعادلتين (3) و(4) نجد أن:

$$A = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx \qquad (5)$$

ويمكن تلخيص ذلك في النظرية التالية:

نظرية

إذا كانت R منطقة في المستوى xy ومحدودة بمنحني مغلق بسيط وناعم مقطعياً وليكن C فإن مساحة المنطقة R تكون

$$A=\oint_C xdy=-\oint_C ydx=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx$$

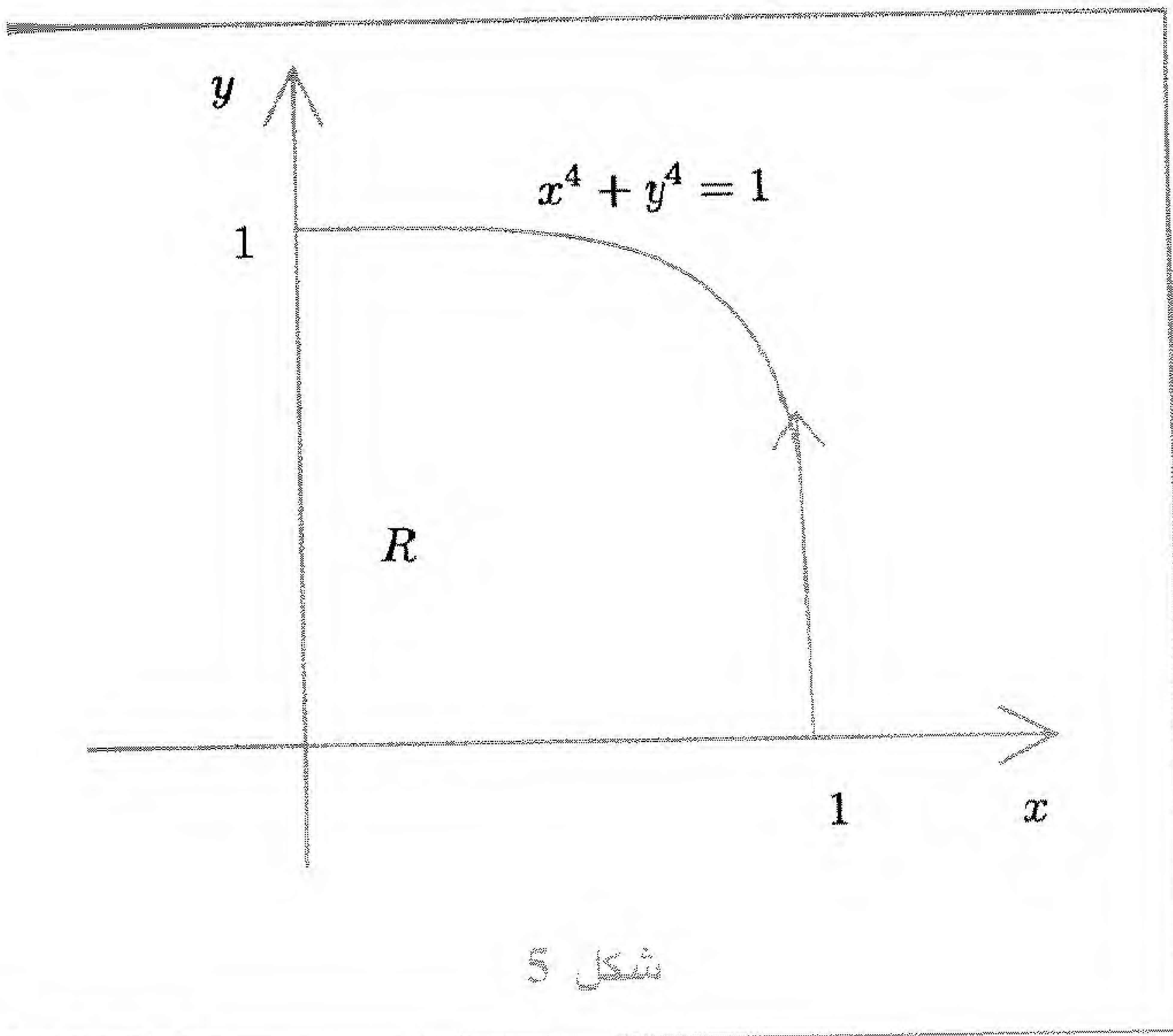
على الرغم من أن الصيغتين(3) و(4) تظهران سهلتي التطبيق، إلا أن الصيغة (5) يمكن أن تكون أبسط لبعض منحنيات معينة وتؤدي إلى تكاملات بسيطة.

وفيما يلي سنقدم بعض الأمثلة لتوضيح نظرية جرين

مثـال 1

أوجد

$\int_{\partial R} 2y^3dx+(x^4+6y^2x)dy$ حيث أن ∂R كما في الشكل (5).



شكل 5

الحـل

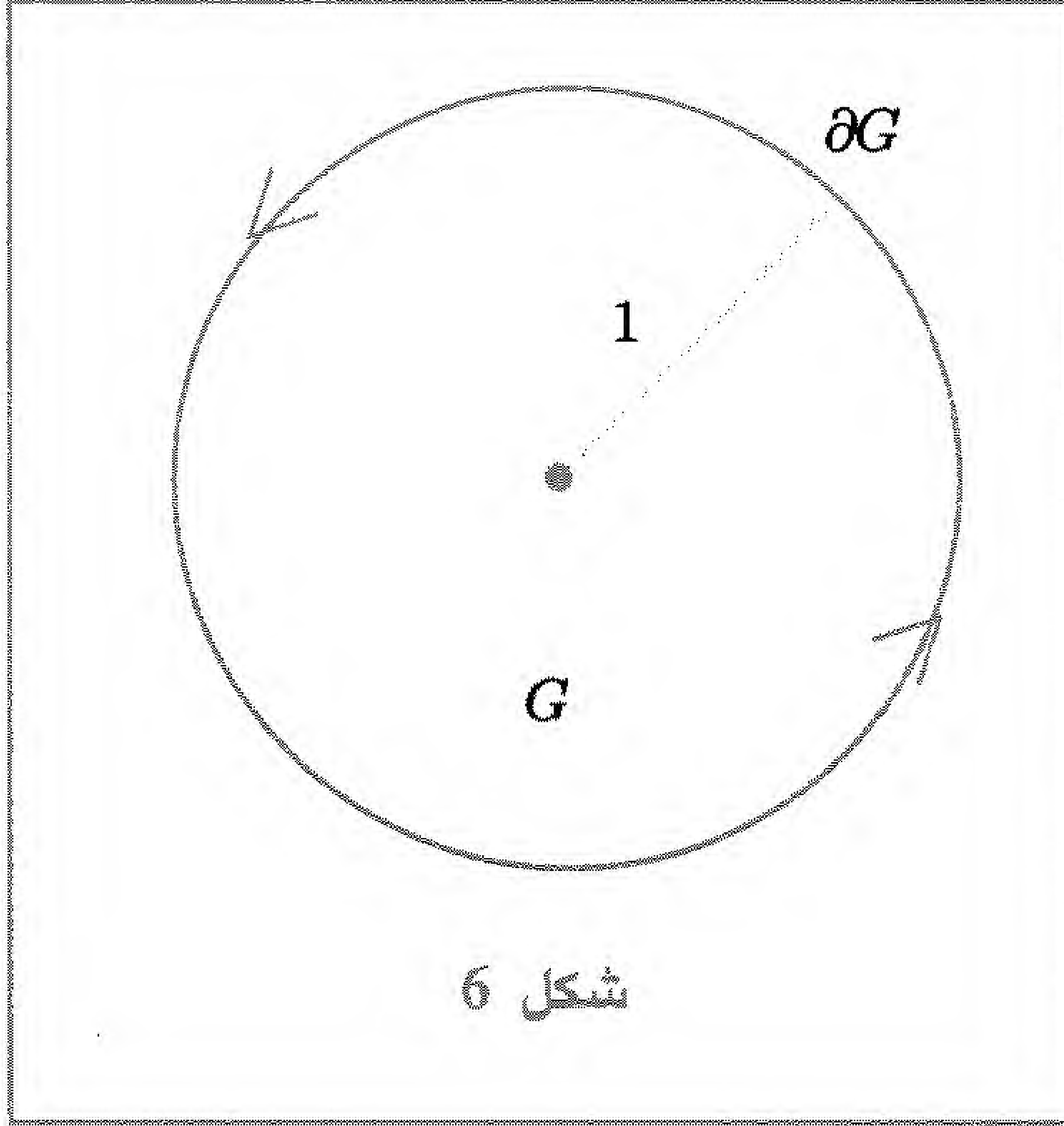
$$\int_{\partial R} 2y^3dx+(x^4+6y^2x)dy$$

$$=4\int_0^1\int_0^{(1-x^4)^{\frac{1}{4}}} x^3dydx$$

ويترك للقارىء أن يبين أن قيمة التكامل $\frac{4}{5}$

مثــال 2

حقق نظرية جرين عندما $Q(x,y)=3x, P(x,y)=2y$ والمنطقة G دائرة نصف قطرها 1 أي أن $x^2+y^2=1$



شكل 6

الحــل

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\iint_G dA$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}(2\pi)=\pi$$

معادلة حدود G أو ∂G هي

$x=\cos\theta$ و $y=\sin\theta$ و $-\pi\le\theta\le\pi$

ولذلك

$$\oint_{\partial G}(Pdx+Qdy)=\int_{-\pi}^{\pi}\{2(\sin\theta)d\cos\theta+3\cos\theta d(\sin\theta)\}$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}(-2\sin^2\theta+3\cos^2\theta)d\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}(-2+5\cos^2\theta)d\theta$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(-2+\frac{5}{2}(\cos2\theta+1)\right)d\theta$$

$$= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{5}{4} sin2\theta\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}(\pi + \pi) = \pi$$

مثـال 3

إذا كانت G دائرة الوحدة، فاستخدم نظرية جرين لإيجاد

$$\int_{\partial G} [(x^2 - y^3)dx + (y^2 + x^3)dy]$$

الحـل

$$\int_{\partial G} [(x^2 - y^3)dx + (y^2 + x^3)dy] = \iint_G (3x^2 + 3y^2)dA$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3 dr d\theta$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{3}{4}(2\pi) = \frac{3\pi}{2}$$

مثـال 4

إذا كانت المنطقة G خارج دائرة الوحدة ويحدها من اليسار القطاع المكافىء $y^2 = 2(x+2)$ ومن اليمين المستقيم $x = 2$، فاستخدم نظرية جرين لإيجاد $\int_{C_1} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right)$ حيث أن C_1 الحدود الخارجية للمنطقة G.

الحـل

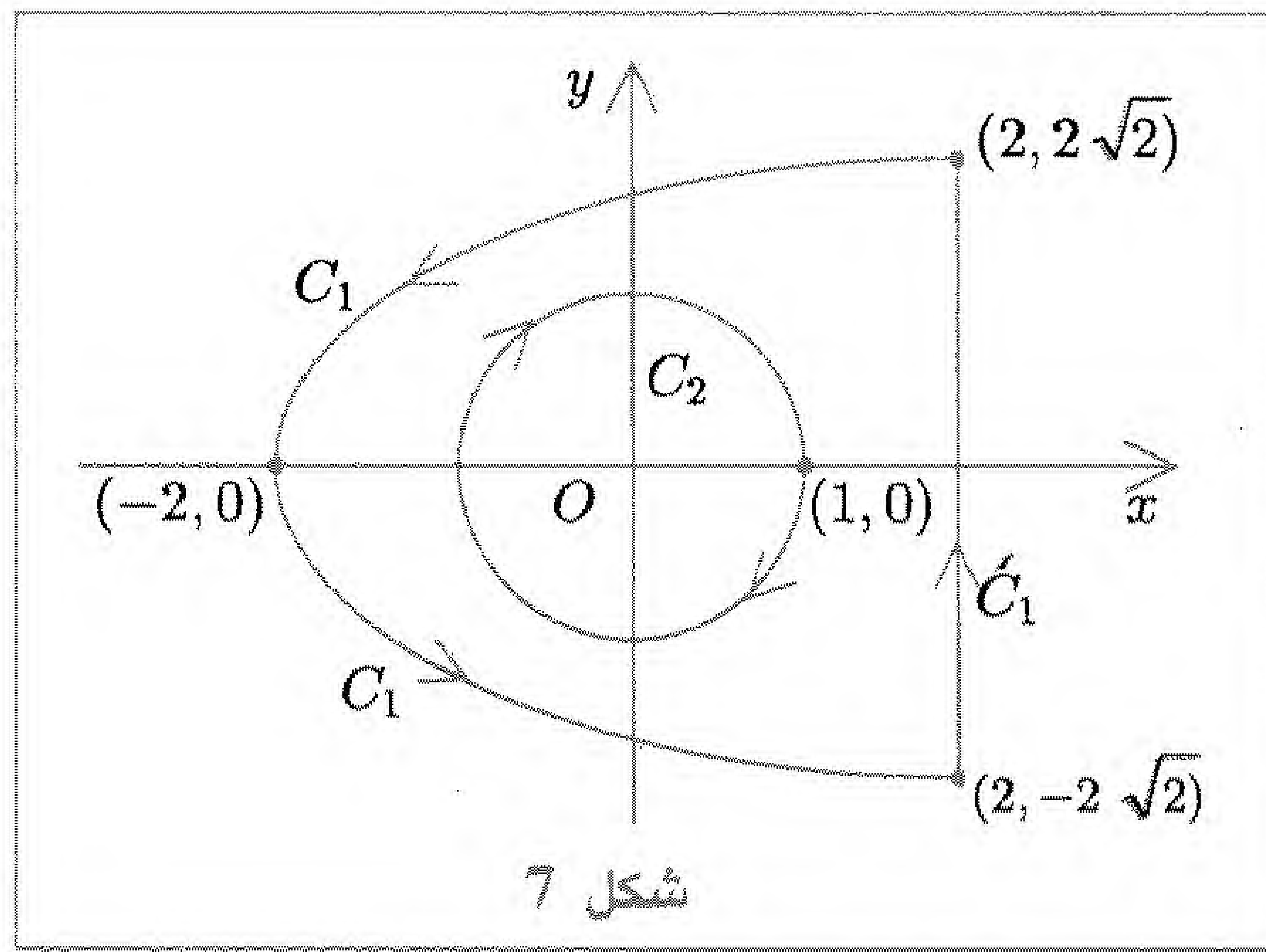
لاحظ أن الدالة المتكاملة غير متصلة عند نقطة الأصل، وكذلك

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2) - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

و

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2) + y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

اي أن $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$



شكل 7

وبذلك يمكن استخدام نظرية جرين

$$\int_{C_1+C_2} \left(-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right) = 0$$

وهكذا $\int_{C_1} \left(-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right) = \int_{-C_2} -\left(\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right)$

حيث أن $-C_2$ حدود دائرة الوحدة في اتجاه عكس اتجاه عقارب الساعة. وبما أن $x = cos\theta$ و$y = sin\theta$ على دائرة الوحدة $-C_2$ فإن:

$$\int_{C_1} \left(-\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right) = \int_{-\pi}^{\pi} (-sin\theta d(cos\theta) + cos\theta d(sin\theta)$$

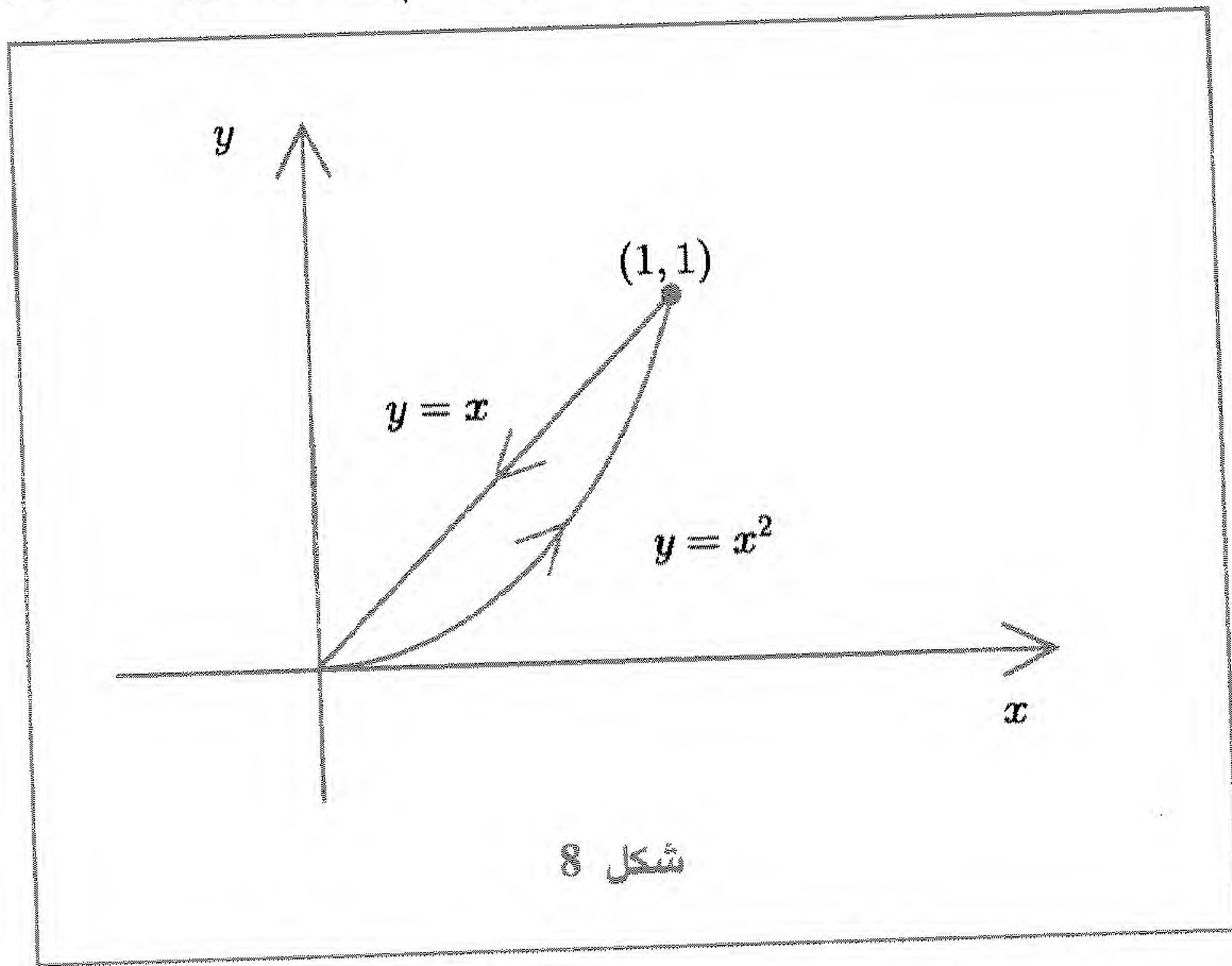
$$= \int_{-\pi}^{\pi} (sin^2\theta + cos^2\theta)d\theta = 2\pi$$

مثـال 5

استخدم نظرية جرين لإيجاد قيمة التكامل الخطي

$$\oint_C 5xy^2dx + x^3ydy$$

حيث أن C المنحنى المغلق الذي يتكون من رسم المعادلتين $y = x^2$ و $y = x$.



شكل 8

الحـل

$$\oint_C 5xy^2dx + x^3ydy = \iint_R (3x^2y - 10xy)dA$$

$$= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (3x^2 - 10x)ydydx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (3x^2 - 10x)(x^2 - x^4)dx$$

وبعد فك القوسين نجد أن:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (3x^4 - 3x^6 - 10x^3 + 10x^5)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{5}x^5 - \frac{3}{7}x^7 - \frac{10}{4}x^4 + \frac{10}{6}x^6\right]\Bigg|_0^1$$
$$= -0.330952381$$

مثـــال 6

إذا كانت

$$\vec{F}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-yi + xj)$$

فبين أن

$$\oint_C F.dr = 2\pi$$

حيث أن C أي منحنى مغلق بسيط متصل وقابل للتفاضل ونقطة الأصل بداخله.

الحـــل

$$\oint_C F.dr = \oint_C \left(\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right)$$

وباستخدام المثال (4)

$$\oint_C \left(\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right) = \oint_{-C_2} \left(\frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy\right) = 2\pi$$

مثـــال

مثـــال 7

أوجد مساحة القطاع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

الحـــل

المعادلات الوسيطية للقطاع الناقص تكون

$$x = acos\theta \quad ، \quad y = bsin\theta \quad ، \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

وبتطبيق الصيغة (3) نجد أن

$$A = \oint_C xdy = \int_0^{2\pi} acos\theta d(bsin\theta)$$

$$= \int_0^{2\pi} abcos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} (1 + cos2\theta)d\theta$$

$$= \frac{ab}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}sin2\theta\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= ab\pi$$

ويترك كتمرين للقارىء تطبيق الصيغتين (4) و(5) لإيجاد المساحة ذاتها.

مثـــال 8

أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمعادلات التالية

$$x = acos^3t \quad ، \quad y = bsin^3t \quad ، \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

الحـــل

بتطبيق الصيغة (5):

$$A = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a cos^3 t d(b\ sin^3 t) - b\ sin^3 t\ d(a\ cos^3 t)$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} 3cos^3 t\ sin^2 t\ cos t\ dt + 3 sin^3 t\ cos^2 t\ sin\ t\ dt$$

$$= \frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi} cos^2 t sin^2 t(cos^2 t + sin^2 t)dt$$

$$= \frac{3ab}{2}\int_0^{2\pi} cos^2 t sin^2 dt$$

ولكن

$$cos\ t\ sin t = \frac{1}{2} sin 2t$$

$$cos^2 t\ sin^2\ t = \frac{1}{4} sin^2 2t$$

$$= \frac{1}{8}(1 - cos 4t)$$

وهكذا

$$A = \frac{3ab}{16}\int_0^{2\pi}(1 - cos 4t)dt$$

$$= \frac{3ab}{16}\left(t - \frac{1}{4} sin 4t\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$\frac{3ab}{16}(2\pi) = \frac{3}{8} ab\pi$$

تمارين 1.5

حقق نظرية جرين في التمارين من $(1-5)$

1) $Q(x, y) = x, P(x, y) = -y^2$ حيث أن $G : 0 \le x \le 1$ و $0 \le y \le 1$

2) $Q(x,y)=-2xy, P(x,y)=xy$ حيث أن G : $\leq x \leq 2$ و $0 \leq y \leq 3$

3) $A(x,y)=e^x cosy, P(x;y)=e^x siny$

حيث أن G : $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

4) $Q(x,y)=2x+6y, P(x,y)=4x-2y$

حيث أن G القطاع الناقص $x=2cos\theta$ و $y=sin\theta$.

5) $P(x,y)=Q(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$ حيث أن G الدائرة $x^2+y^2=1$

في التمارين من (6 ـ 9) أوجد $\oint_{\partial G} v.dr$ مستخدماً نظرية جرين

6) $v=\left(\frac{4}{5}xy^5+2y-e^x\right)i+\left(2xy^4-4siny\right)j$

حيث أن G : $1 \leq x \leq 2$ و $1 \leq y \leq 3$

7) $v=\left(2xe^y-x^2y-\frac{1}{3}y^3\right)i+\left(x^2e^y+siny\right)j$ حيث أن G : $x^2+y^2 \leq 1$

8) $v=(coshx-2)sinyi+sinhxcosyj$

حيث أن G : $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

9) $v=-3x^2yi+3xy^2j$ حيث أن $-a \leq x \leq a$ و $0 \leq y \leq \sqrt{a^2-x^2}$

استخدم نظرية جرين لإيجاد قيمة التكاملات الخطية التالية:

10) $\oint_C (y^3+y)dx+3y^2xdy$ حيث أن C تكون الدائرة $x^2+y^2=100$

11) $\oint_C e^x sinydx+e^x cosydy$

حيث أن C المربع الذي رؤوسه $(-1,1)$ ، $(-1,0)$ ، $(0,0)$ و $(0,1)$.

12) $\oint_C (cos^3x+e^x)dx+e^ydy$ حيث أن C رسم المعادلة $x^6+y^8=$

13) $\oint_C \frac{1}{3}y^3dx - \frac{1}{3}x^3dy$ حيث أن C القلب $r = 1 - cos\theta$

في التمارين من (14 ـ 16) استخدم نظرية جرين لإيجاد قيمة التكامل الخطي

$$\oint_C F.dr$$

14) $F(x,y) = yi + 3xj$ حيث أن C الدائرة $x^2 + y^2 = 4$

15) $F(x,y) = y^4i + x^3j$

حيث أن C المربع الذي رؤوسه $(-1,-1), (-1,1), (1,-1)$ و $(1,1)$.

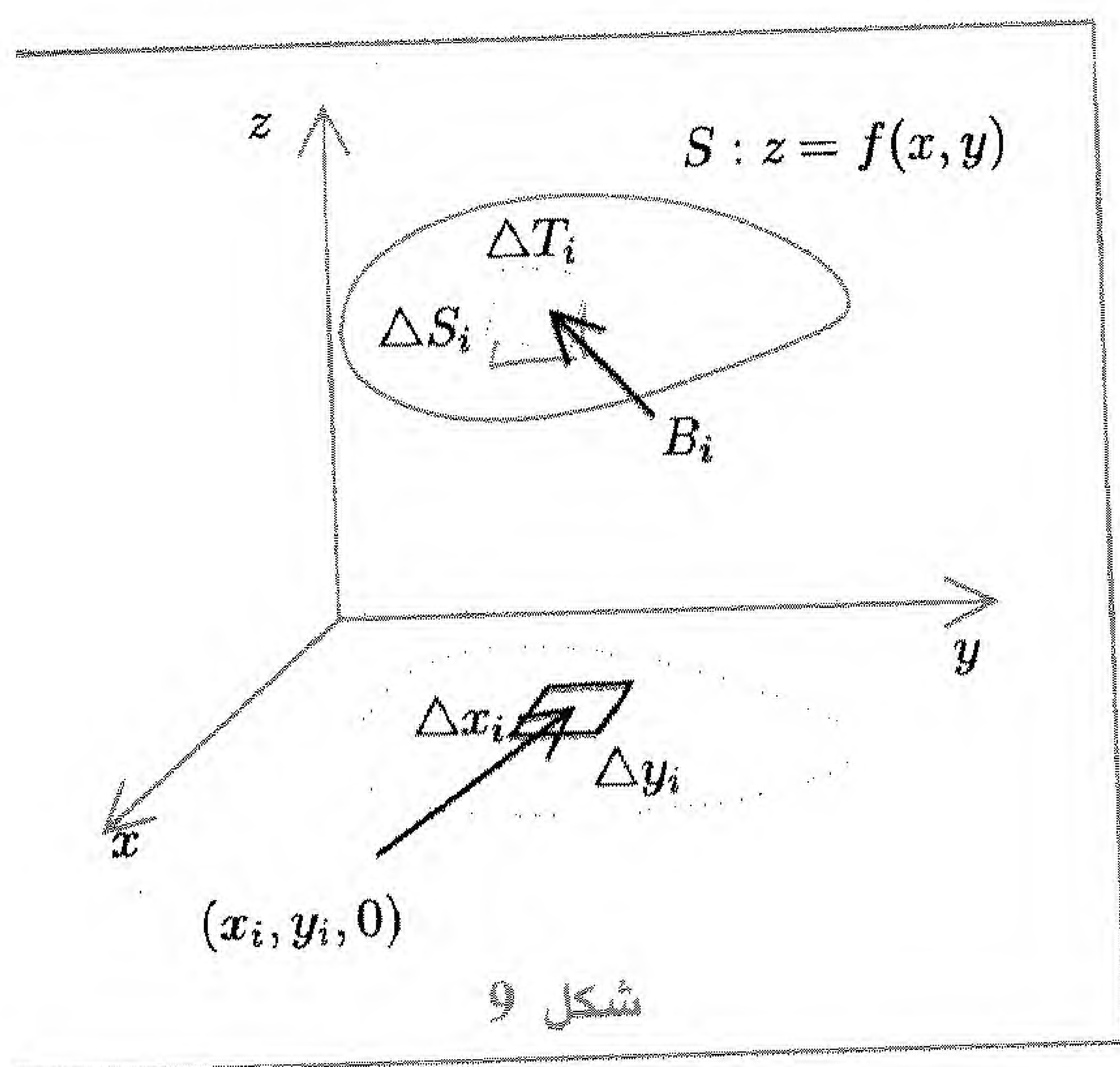
16) $F(x,y) = y(x^2 + y^2)i - x(x^2 + y^2)j$

حيث أن C دائرة الوحدة $x^2 + y^2 = 1$

2.5 المساحة السطحية (Surface Area)

نفرض أن $f(x,y) \geq 0$ على المنطقة R في المستوى xy، وf_x وf_y متصلتان على R، وإذا كانت S ترمز إلى جزء من رسم الدالة f الذي إسقاطه R على المستوى xy، وللسهولة نفرض أنه لا يوجد متجه متعامد على S يكون موازياً للمستوى xy. والمطلوب الآن هو تعريف المساحة A للسطح S ولإيجاد الصيغة التي تمكننا من حساب المساحة A.

نقسم المنطقة R إلى n من المستطيلات بمستقيمات موازية للمحورين، راجع تعريف (التكامل الثنائي)، ونفرض أن التقسيم أو التجزيء $P = \{R_i\}$ يقع بالكامل داخل المنطقة R ونفرض أن بعدي المستطيل R_i هما Δx_i و Δy_i، ويأخذ نقطة اختيارية $(x_i, y_i, 0)$ في كل مستطيل R_i ونفرض أن النقطة المناظرة لها على السطح S هي $B_i(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ ونعتبر المستوى المماس للسطح S عند النقطة B_i.



شكل 9

وإذا كانت ΔT_i و ΔS_i ترمزان إلى عنصري المساحة على المستوى المماس والسطح S على التوالي وبإسقاط R_i رأسياً إلى أعلى، وإذا كان طول أكبر قطر مستطيل صغيراً جداً فإن $\Delta T_i \approx \Delta S_i$ والمجموع $\sum_i \Delta T_i$ يعتبر قيمة تقريبية لمساحة السطح S.

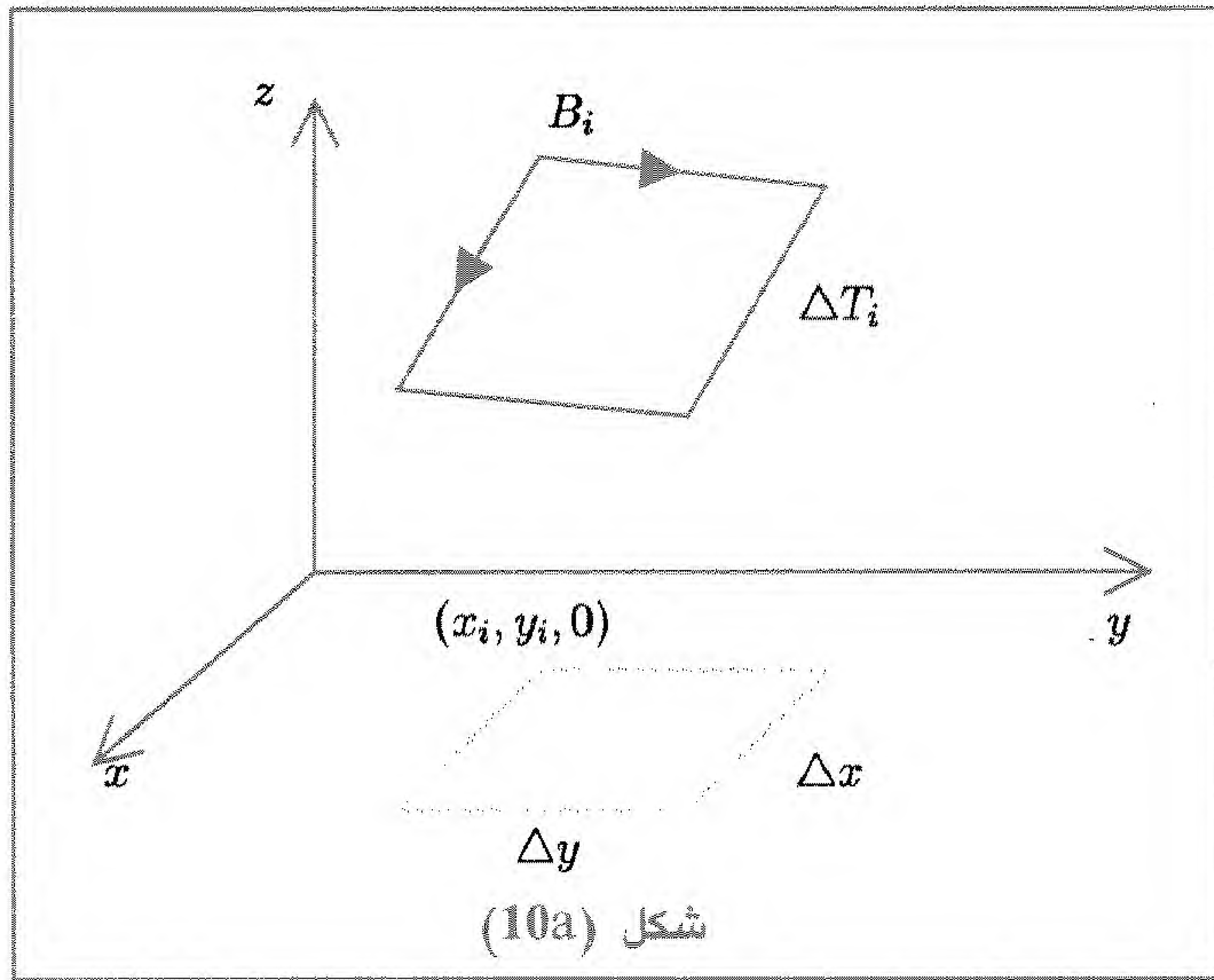
وبذلك تعرّف المساحة السطحية A كما يأتي:

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_i \Delta T_i \qquad (1)$$

حيث $\|P\|$ مقياس أو معيار التقسيم.

وإذا فرضنا أن النقطة $(x_i, y_i, 0)$ عند زاوية المستطيل R_i أنظر الشكل (10a) قرب نقطة الأصل ونفرض أن المتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ لهما النقطة الابتدائية نفسها $B_i(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ أي مماسين لرسيمات (Traces) السطح S على المستويات $y = y_i$ و $x = x_i$ على التوالي.

وبذلك $\quad \vec{a} = \Delta x_i i + f_x(x_i, y_i)\Delta x_i k \qquad \vec{b} = \Delta y j + f_y(x_i, y_i)\Delta y_i k$



شكل (10a)

ومساحة متوازي الأضلاع المحدد بالمتجهين $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هي:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \Delta x_i & 0 & f_x(x_i, y_i)\Delta x_i \\ 0 & \Delta y_i & f_y(x_i, y_i)\Delta y_i \end{vmatrix}$$

وبفك المحدد نجد أن:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -f_x(x_i, y_i)\Delta x_i \Delta y_i i - f_y(x_i y_i)\Delta x_i \Delta y_i j + \Delta x_i \Delta y_i k$$

أي أن

$$\Delta T_i = |a \times b| = \sqrt{(f_x(x_i, y_i))^2 + (f_y(x_i, y_i))^2}.(\Delta x_i \Delta y_i)$$

ولكن $\Delta A_i = \Delta x_i \Delta y_i$ وبأخذ نهاية المجموع ΔT_i ومن تعريف التكامل الثنائي نجد أن:

$$A = \iint_R \sqrt{(f_x(x,y))^2 + (f_y(x,y))^2 + 1}\, dxdy \tag{2}$$

ويمكن استخدام الصورة السابقة إذا كانت $f(x,y) \leq 0$ على المنطقة R.

وإذا كان للسطح S إسقاط ملائم على المستوى yz حيث أن S رسم المعادلة $y = g(x,z)$، فإن:

$$A = \iint_R \sqrt{(g_x(x,y))^2 + (g_z(x,y))^2 + 1}\, dx\, dz \tag{3}$$

وبصورة مماثلة، إذا كان للسطح S إسقاط ملائم على المستوى xz حيث أن S رسم المعادلة $x = h(y,z)$، فإن:

$$A = \iint_R \sqrt{(h_y(y,z))^2 + (h_z(y,z))^2 + 1}\, dydz \tag{4}$$

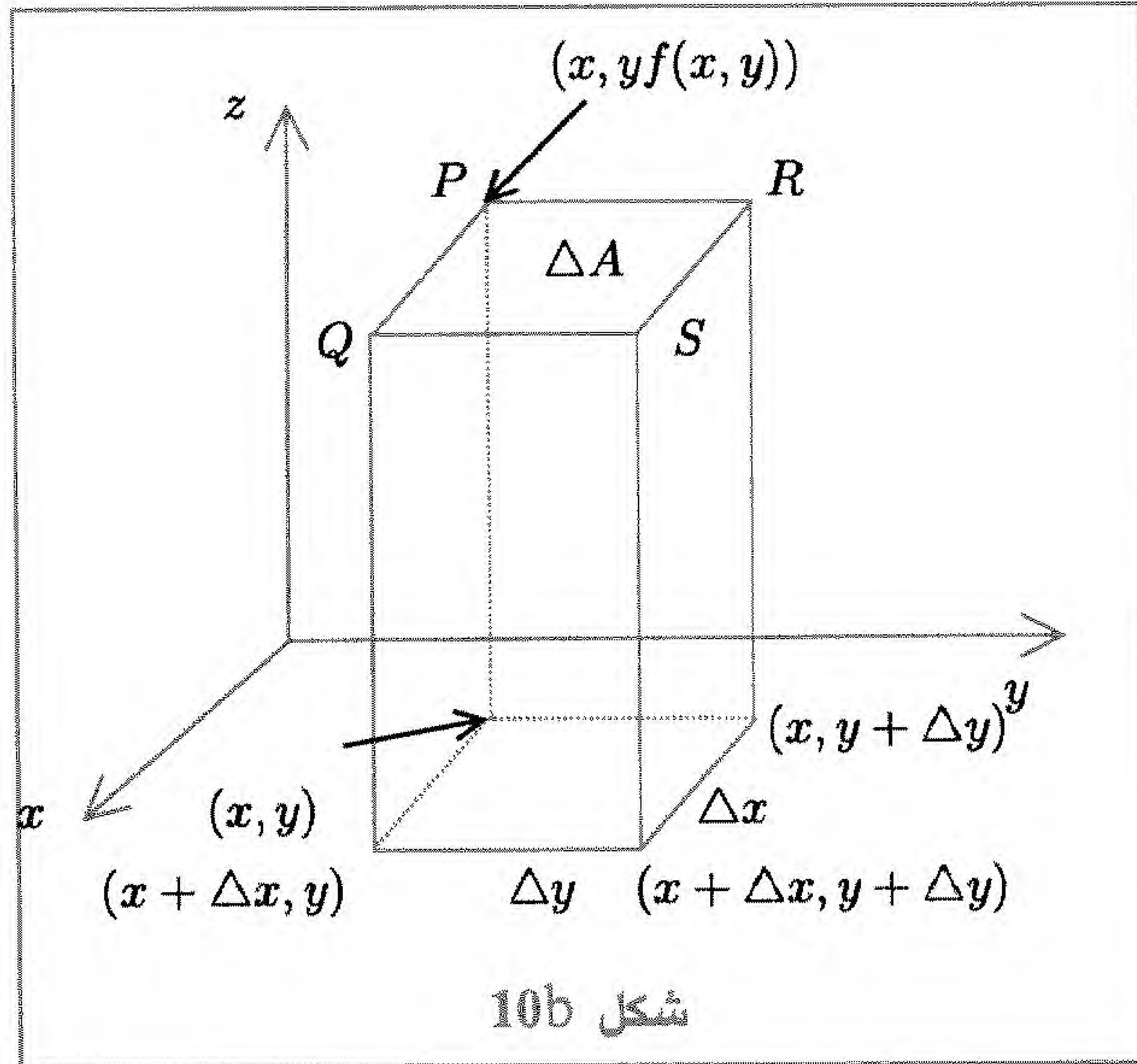
ويمكن اشتقاق قانون المساحة السطحية (2) كما يلي:

اشتقاق قانون المساحة السطحية

نبدأ بحساب المساحة السطحية ΔA على المستطيل ΔR الذي أبعاده Δx وΔy، أنظر الشكل $(10b)$.

ونفرض أن $f(x,y) > 0$ لكل (x,y) في Ω، ونفرض أن المشتقات الجزئية للدالة f متصلة على المستطيل R.

وإذا كانت Δx وΔy صغيرتين، فإن المنطقة $PQSR$ تكون على شكل متوازي أضلاع. وهكذا



شكل 10b

$$\Delta A = \left| \vec{PQ} \times \vec{PR} \right|$$

ولكن

$$\vec{PQ} = (x + \Delta x, y, f(x + \Delta x, y)) - (x, y, f(x, y))$$

$$= (\Delta x, 0, f(x + \Delta x, y)) - f(x, y)$$

$$= (\Delta x, 0, f_x(x, y)\Delta x)$$

(لماذا؟)

وبالطريقة نفسها نجد أن:

$$\vec{PR} = (x, y + \Delta y, f(x, y + \Delta y)) - (x, y, f(x, y))$$

$$= (0, \Delta y, f(x, y + \Delta y)) - f(x, y)$$

$$= (0, \Delta y, f_y f(x, y))$$

وبذلك

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} i & i & k \\ \Delta x & 0 & f_x \Delta x \\ 0 & \Delta y & f_y \Delta y \end{vmatrix}$$

وبفك المحدد نجد أن:

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = (-f_x(x,y)i - f_y(x,y)j + k)\Delta x \Delta y$$

ومنها

$$\Delta A = \left|\vec{PQ} \times \vec{PR}f\right| = \sqrt{f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y) + 1}\,\Delta x \Delta y$$

وبجمع المساحات السطحية على المستطيلات التي تتكون منها المنطقة وبأخذ النهاية نجد أن:

$$A = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dA$$

والآن تعتبر الأمثلة التالية:

مثـــال 1

أوجد المساحة السطحية الجانبية المقطوعة من الأسطوانة $y^2 + z^2 = 9$ بالمستويين $x = 0$ و$x = 4$

الحــل

السطح عبارة عن أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها 4، ونصف قطرها 3، ومحورها يقع على محور x، وتكون مساحتها السطحية $A = 2\pi rh = 24\pi$.

والآن نستخدم القانون (2) لإيجاد المساحة السطحية، والمساحة السطحية تشتمل على جزئين متساويين $z > 0$ و$z < 0$ وبذلك نحسب المساحة السطحية ونضرب النتيجة في 2 لنحصل على المساحة السطحية الكلية.

وعندما تكون $z > 0$ فإن

$f(x,y) = \sqrt{9 - y^2}$، ومنها $f_x = 0$ و $f_y = \dfrac{-y}{\sqrt{9 - y^2}}$ أو $f_y^2 = \dfrac{y^2}{9 - y^2}$

وبما أن $x \in [0,4]$ و $y \in [-3,3]$ وبالتعويض في (2) نجد أن:

$$A = 2\int_0^4 \int_{-3}^3 \sqrt{1+\frac{y^2}{9-y^2}}\, dy\, dx$$

$$= 4\int_0^4 \int_0^3 \sqrt{\frac{9}{9-y^2}}\, dy\, dx$$

$$= 12\int_0^4 \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-y^2}}\, dy\, dx$$

وباستخدام التعويض $y = Sin\ \theta$، نجد أن: $A = 12\int_2^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, dx = 6\pi \int_0^4 dx = 24\pi$

مثال 2

أوجد المساحة الجانبية المقطوعة من الأسطوانة $y^2 + z^2 = 9$ بالمستويات $y = 0$، $y = 2$ ، $x = 0$ ، $x = 1$

الحل

المساحة السطحية تشتمل على جزئين $z > 0$ و$z < 0$ ونحسب مساحة السطح $z > 0$ وبالضرب في 2 نحصل على المساحة الجانبية، وإذا كانت $z > 0$، فإن $f(x,y) = \sqrt{9-y^2}$ ومنها $f_x = 0$ و $f_y = \frac{-y}{\sqrt{9-y^2}}$. وباستخدام (2) نحصل على:

$$A = \iint_\Omega \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dA$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 \sqrt{1+\frac{y^2}{9-y^2}}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^2 \frac{3}{\sqrt{9-y^2}}\, dy$$

$$= 3sin^{-1}\frac{y}{3}\Big|_0^2$$

$$= 3sin^{-1}\frac{2}{3}$$

وهذا يعني أن المساحة السطحية الكلية تكون $6sin^{-1}\frac{2}{3}$ ويمكن استخدام التعويض في المثال السابق.

مثال 3

أوجد مساحة السطح S حيث أن S رسم المعادلة $z = 4 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)$ الذي فوق أو على المستوى xy.

الحل

بتطبيق (2)

$$A = \iint_R \sqrt{x^2+y^2+1}dxdy$$

حيث أن R المنطقة الواقعة في المستوى xy ومحددة بالدائرة $x^2+y^2=8$ وباستخدام الإحداثيات القطبية نجد أن:

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\sqrt{2}} (1+r^2)^{\frac{1}{2}} rdrd\theta$$

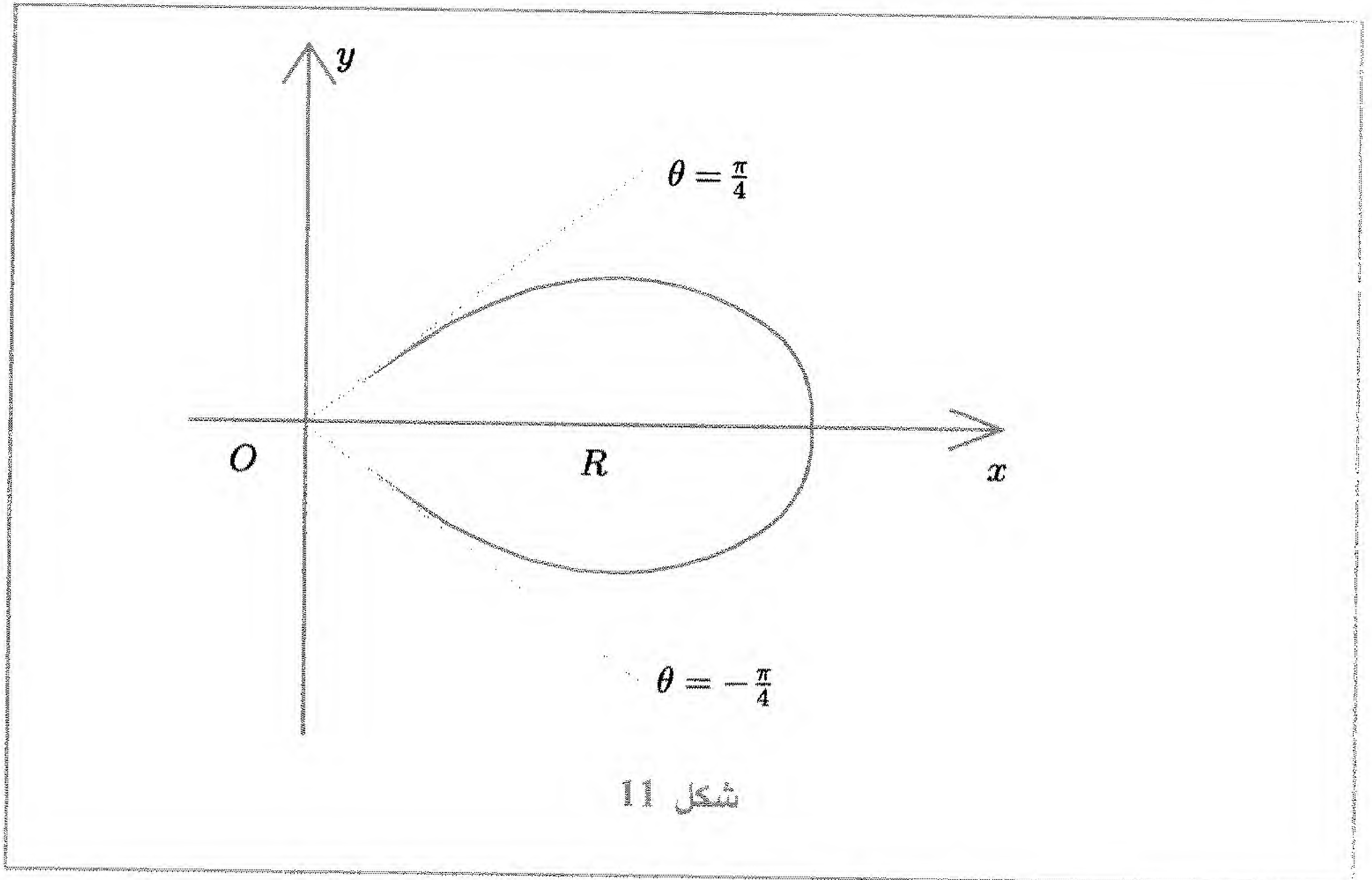
وبالتكامل بالنسبة لـ r:

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{2\sqrt{2}} d\theta$$

$$= \frac{26}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{52\pi}{3}$$

مثـال 4

أوجد مساحة السطح S حيث أن S جزء من الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ المقطوع بالأسطوانة الرأسية المقامة على حلقة المنحنى الذي معادلته بالإحداثيات القطبية $r = acos2\theta$



شكل 11

الحـل

السطح يشتمل على جزئين هما جزء فوق المستوى xy والآخر تحت المستوى xy والجزءان متماثلان.

ويمكن إيجاد السطح العلوي كما يأتي:

معادلة الجزء العلوي:

$$f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

وبذلك $f_x = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$ و $f_y = \dfrac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$

وهكذا (أنظر الشكل (11)).

$$A = \iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy$$

وباستخدام الإحداثيات القطبية

$$A = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\cos 2\theta} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, dr\, d\theta$$

لاحظ أن التكامل معتل (عند $\theta = 0$) وبذلك:

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \int_0^{a\cos 2\theta} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, dr\, d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\cos 2\theta} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, dr\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{a\cos 2\theta} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr d\theta$$

$$= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin 2\theta) d\theta = 2a^2 (\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2a^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} a^2 (\pi - 2)$$

$\therefore$ المساحة الكلية $= a^2(\pi - 2)$

مثال 5

أوجد مساحة سطح جزء القطع المكافىء $z = x^2 + y^2$ المقطوع بالمستوى $z = 1$ (أو أسفل المستوى $z = 1$).

الحــل

إسقاط مساحة السطح S على المستوى xy هو الدائرة $x^2+y^2=1$

$$S=\iint\limits_R \sqrt{(f_x)^2+(f_y)^2+1}\ \ dA$$

$$\iint\limits_R \sqrt{4x^2+4y^2+1}\ \ dA$$

وباستخدام الإحداثيات القطبية نجد أن:

$$S=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 \sqrt{4r^2+1}\ \ rdrd\theta$$

$$=\frac{1}{12}\int\limits_0^{2\pi}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 d\theta$$

$$=\frac{1}{12}(5^{\frac{3}{2}}-1)\int\limits_0^{2\pi}d\theta=\frac{\pi}{5}(5\sqrt{5}-1)$$

تمارين 2.5

1) أوجد مساحة جزء الأسطوانة $y^2+z^2=a^2$ الذي يقع داخل الأسطوانة

$$x^2+y^2=a^2$$

2) إذا كانت المنطقة R في المستوى xy عبارة عن مثلث رؤوسه $(0,2),(2,2),(0,0)$ أوجد مساحة سطح جزء رسم المعادلة $z=y^2$ الذي يقع على R.

3) بيّن أن مساحة سطح الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ الذي يقع داخل الأسطوانة $x^2 + y^2 + ay = 0$ هو $2a^2(\pi - 2)$

4) أوجد المساحة المقطوعة من السطح $az = y^2 - x^2$ بالأسطوانة $x^2 + y^2 = a^2$

5) أوجد مساحة سطح جزء الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ الذي يقع داخل الأسطوانة $x^2 + y^2 = 2ax$

6) أوجد مساحة سطح جزء الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ الذي يقع داخل المجسم المكافىء $x^2 + y^2 = 8z$

7) أوجد مساحة سطح جزء المجسم المكافىء $z = 9 - x^2 - y^2$ الذي فوق المستوى xy.

3.5 التكامل السطحي

هو إجراء عملية التكامل على سطح وهو تعميم للتكامل الخطي في بعدين أو أكثر، والتكامل السطحي يساعد في وصف بعض الظواهر الطبيعية ويظهر في نظرية ستكوس ونظرية التفرق، وهما تعميم للنظرية الأساسية للتفاضل والتكامل وسندرسهما في نهاية هذا الفصل.

إذا كان إسقاط السطح S على إحداثيات المستوى هو نوع من المناطق التي اعتبرت في التكامل الثنائي والثلاثي، فإن الإسقاط يسمى منتظماً على إحداثيات المستوى. نفرض أن S رسم المعادلة $z = f(x, y)$ حيث أن S لها إسقاط منتظم R في المستوى xy أنظر الشكل (9).

ونفرض أن $f_y(x, y), f_x(x, y)$ متصلتان، وبصورة مماثلة لتعريف المساحة A للسطح S يمكن تعريف تكامل الدالة $g(x, y, z)$ على السطح S حيث أن $g(x, y, z)$ متصلة في المنطقة التي تحتوي على السطح S.

نفرض أن ΔS_i و ΔT_i ترمزان إلى المساحة الجزئية على السطح S والمستوى المماس T على التوالي عند النقطة $B_i(x_i, y_i, z_i)$ التي إسقاطها المستطيل R_i للتقسيم P للمنطقة R، وكما في تعريفات التكاملات السابقة نقدر الدالة $g(x, y, z)$ عند B_i لكل i ونكوّن المجموع $\sum_i g(x_i, y_i, z_i)\Delta T_i$.

وبذلك يعرّف التكامل السطحي كما يأتي:

$$\iint_S g(x, y, z)ds = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_i g(x_i, y_i, z_i)\Delta T_i$$

$$= \iint_S g(x, y, f(x, y))\sqrt{(f_x)^2 + (f)^2 + 1}\ \ dxdy \qquad (1)$$

لاحظ أنه إذا كانت $g(x, y, z) = 1$ لكل (x, y, z) فإن التكامل السطحي يساوي المساحة السطحية للسطح S.

وبصورة مشابهة إذا كانت معادلة السطح S على الصورة:

$$y = h(x, z)$$

حيث أن h_z, h_x متصلتان وR إسقاط منتظم للسطح S على المستوى xz فإن:

$$\iint_S g(x,y,z)ds = \iint_S g(x,h(x,z),z)\sqrt{(h_z)^2+(h_z)^2+1}\ dx\ dz \qquad (2)$$

وكذلك إذا كان السطح S يعطى بالمعادلة:

$$x = k(y, z)$$

حيث أن k_z, k_x متصلتان، فإن:

$$\iint_S g(k(y,z),y,z)\sqrt{(k_y)^2+(k_z)^2+1}dydz \qquad (3)$$

وفي بعض الحالات يمكن اعتبار التكاملات السطحية التي تحتوي على دالة متجهة $\vec{F}$ حيث أن:

$$\vec{F}(x,y,z) = M(x,y,z)i + N(x,y,z)j + P(x,y,z)k$$

حيث P, N, M دوال متصلة، وإذا كان $\vec{n}$ متجه الوحدة المتعامد، فإن $\vec{F}(x,y,z).n$ يسمى المركبة المتعامدة للدالة $\vec{F}$ عند النقطة (x, y, z).

ويمكن تعريف التكامل السطحي للمركبة المتعامدة للدالة F على السطح كما يأتي:

$$\iint_S F.nds = \iint_S (Mcos\alpha + Ncos\beta + Pcos\delta)ds \qquad (4)$$

حيث أن $\vec{n} = cos\alpha i + cos\beta j + cos\delta k$

و $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\delta = 1$

والتكامل السطحي $\iint_S F.nds$ يمثل كمية السائل المتدفقة خلال السطح S على وحدة الزمن أو التدفق ($FLUX$).

مثال 1

أوجد قيمة التكامل السطحي

$$\iint_S \sqrt{x^2+y^2}zds$$

حيث أن S جزء من المخروط الدائري $z^2 = x^2 + y^2$ الذي يقع بين المستويين $z = 1$ و $z = 4$.

الحل

$$S : Z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (1)$$

وبذلك

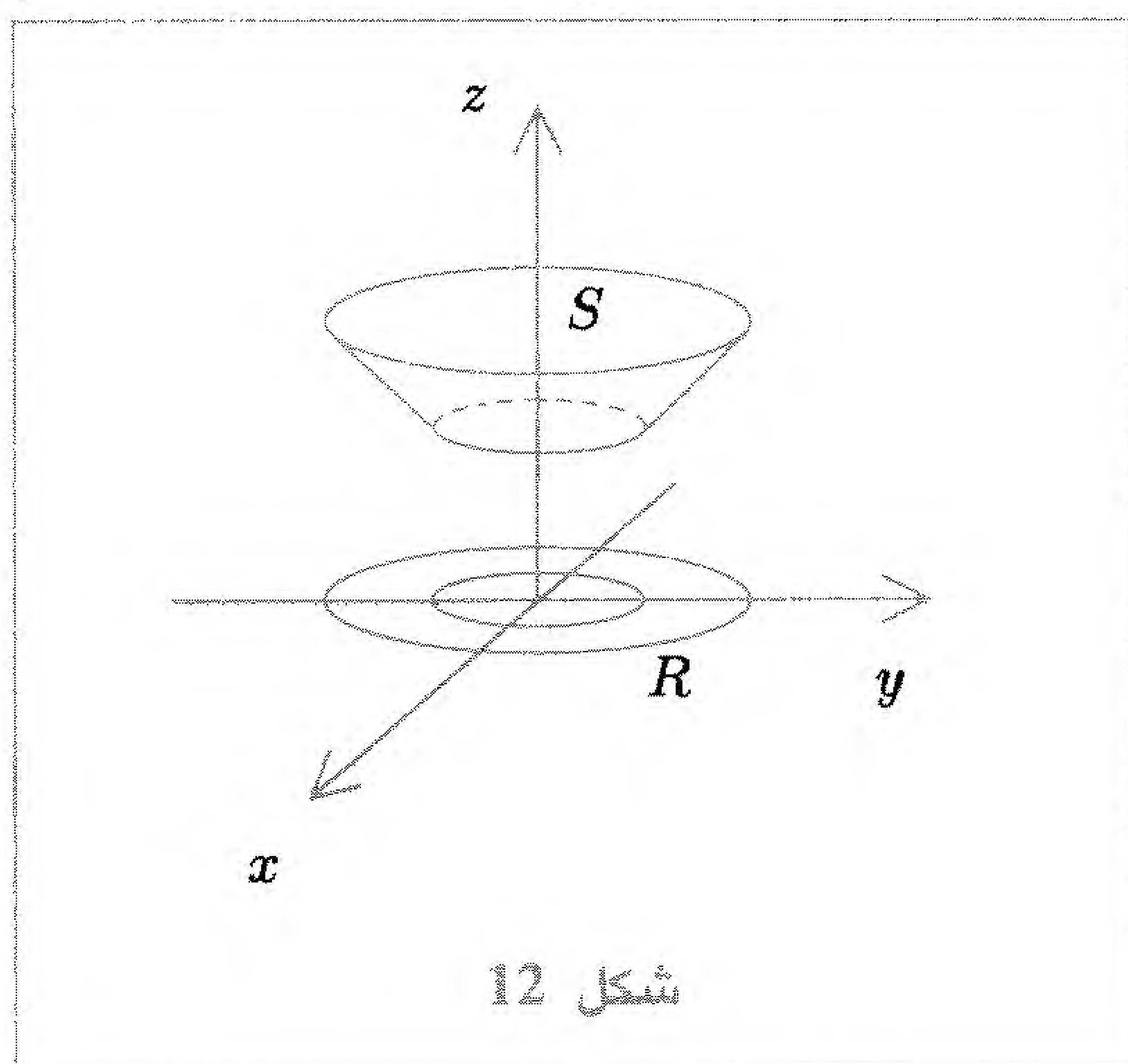
$$f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ و } f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

وبالتعويض في (1) نجد أن:

$$\iint_S \sqrt{x^2+y^2}Zds = \iint_S (\sqrt{x^2+y^2})(\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1}\, dA$$

$$= \sqrt{2}\iint_R (x^2+y^2)dA$$

حيث أن الإسقاط R للسطح S على المستوى xy هو عبارة عن المنطقة الواقعة بين الدائرتين $r = 1$ و $r = 4$ ومركزهما عند نقطة الأصل، أنظر الشكل (12).



شكل 12

وباستخدام الإحداثيات القطبية :

$$\iint_R (x^2+y^2)\sqrt{2}\, dA = \int_0^{2\pi}\int_1^4 \sqrt{2}r^2(rdrd\theta)$$

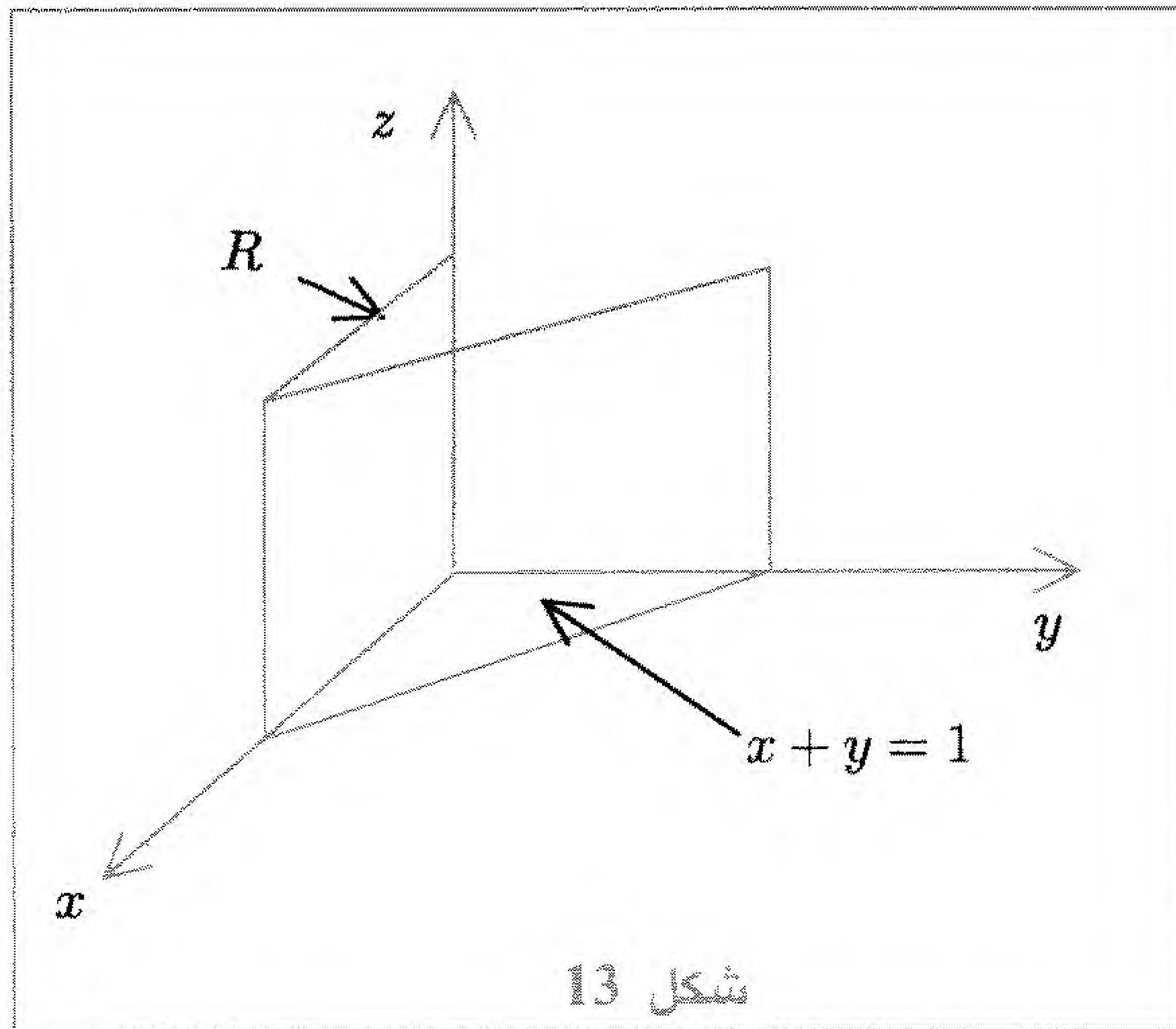
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(4^4-1)\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{255\pi}{\sqrt{2}}$$

مثـــال 2

أوجد قيمة التكامل السطحي $\iint_S (x^2+y^2+z^2)ds$

حيث أن S جزء من المستوى $x+y=1$ الواقع في الثمن الأول حيث $0 \le z \le 1$.



شكل 13

لاحظ أنه لا توجد دالة f في المتغيرين x و y رسمها S ولكن إذا كان R المربع في المستوى xz يشتمل عل كل النقاط (x,z) حيث $0 \le x \le 1$ و $0 \le z \le 1$ وإذا كان:

$$f(x,z) = 1 - x$$

فإن S رسم المعادلة $y=f(x,z)$ على R وبإحلال z بدلاً من y في (2) نجد أن:

$$\iint_S (x^2+y^2+z^2)\sqrt{(-1)^2+(0)^2+1}dA$$

$$=\iint_S (x^2+(1-x)^2+z^2)\sqrt{2}dzdx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1\int_0^1 (2x^2-2x+1+z^2)dzdx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1 \left(2(x^2-2x+1)z+\frac{1}{3}z^3\Big|_0^1\right)dx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1 \left(2x^2-2x+\frac{2}{3}\right)dx$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^3-x^2+\frac{2}{3}x\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}-1+\frac{2}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

مثال 3

أوجد قيمة التكامل السطحي

$$\iint_S (1-z^2)ds$$

حيث أن S نصف الكرة: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

الحل

$$\iint_S (1-z^2)ds=\iint_S (1-z^2)\sqrt{[f_x(x,y)]^2+[f_y(x,y)]^2+1}dA \qquad (1)$$

حيث أن:

$$f_x(x,y)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \quad , \quad f_y(x,y)=\frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$[f_x(x,y)]^2=\frac{x^2}{1-x^2-y^2} \quad , \quad [f_y(x,y)]^2=\frac{y^2}{1-x^2-y^2}$$

وهكذا

$$[f_x(x,y)]^2+[f_y(x,y)]^2=\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}$$

$$=\frac{1}{1-x^2-y^2}$$

وبالتعويض في (1) نجد أن:

$$\iint_S (1-z^2)ds=\iint_R (x^2+y^2)\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dA$$

حيث أن $x^2+y^2<1$ لاحظ أن الدالة المكاملة غير معرّفة على دائرة الوحدة

$$x^2+y^2=1$$

ولكن يمكن إيجاد قيمة التكامل على القرص الذي يقع داخل دائرة الوحدة حيث أن $x^2+y^2=b^2$ و $0<b<1$.

وبذلك

$$\iint_S (1-z^2)ds=\lim_{b\to 1^-}\int\int_{Rb}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}dA$$

وباستخدام الإحداثيات القطبية:

$$\lim_{b\to 1^-}\int_0^{2\pi}\int_0^{b}\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}(rdrd\theta)$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\lim_{b\to 1^-}\left(-r^2\sqrt{1-r^2}-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{1}{3}}\right)\Bigg|_0^b\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{2\pi}{3}$$

تمارين 3.5

أوجد قيمة التكامل السطحي $\iint_S f(x,y,z)ds$ في الحالات التالية:

1) $f(x,y,z)=x$ و S جزء المستوى $x+y+z=1$ الذي قع في الثمن الأول.

2) $f(x,y,z)=x^2$ وS جزء المخروط $z^2=x^2+y^2$ بين المستويين $z=1$ و$z=2$.

3) $f(x,y,z)=x^3$ وS جزء الأسطوانة $z=\frac{x^2}{2}$ المقطوع بالمستويات $y=0$ و$x=2$ و$y=x$.

4) $f(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2$ وS سطح الكرة $x^2+y^2+z^2=a^2$.

أوجد $\iint_S F.nds$ حيث أن n المتعامد العلوي للسطح S و$\|n\|=1$:

5) $F=xi+yj+zk$ وS الجزء العلوي من الكرة $x^2+y^2+z^2=a^2$.

6) $F=2i+5k+3k$ وS جزء المخروط $z=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ الذي يقع داخل الأسطوانة $x^2+y^2=1$.

7) $F=xi+yj+zk$ وS جزء المستوى $2x+3y+z=6$ الذي يقع في الثمن الأول.

8) $F=xi+yj+zk$ وS متوازي المستطيلات الذي رؤوسه: $(0,0,0),(1,0,0),(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,0,1),(1,1,1),(0,1,1)$.

(n متجه إلى أعلى من متوازي المستطيلات).

4.5 نظرية ستوكس (Stokes's Theorem)

إذا كانت $\vec{F}$ مجالاً متجهاً في بعدين فإنه يمكن كتابة $\vec{F}$ كما يلي:

$$F(x,y) = P(x,y)i + \alpha(x,y)j + ok$$

والتفاف المجال F يكون

$$CurlF = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & i & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial t} \\ P & \varphi & O \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)k$$

عامل المتجه k له صيغة الدالة المكاملة في التكامل الثنائي في نظرية جرين، راجع البند السابق. وإذا كانت S تمثل طول القوس على استطالة C فإن متجه الوحدة المماس يكون

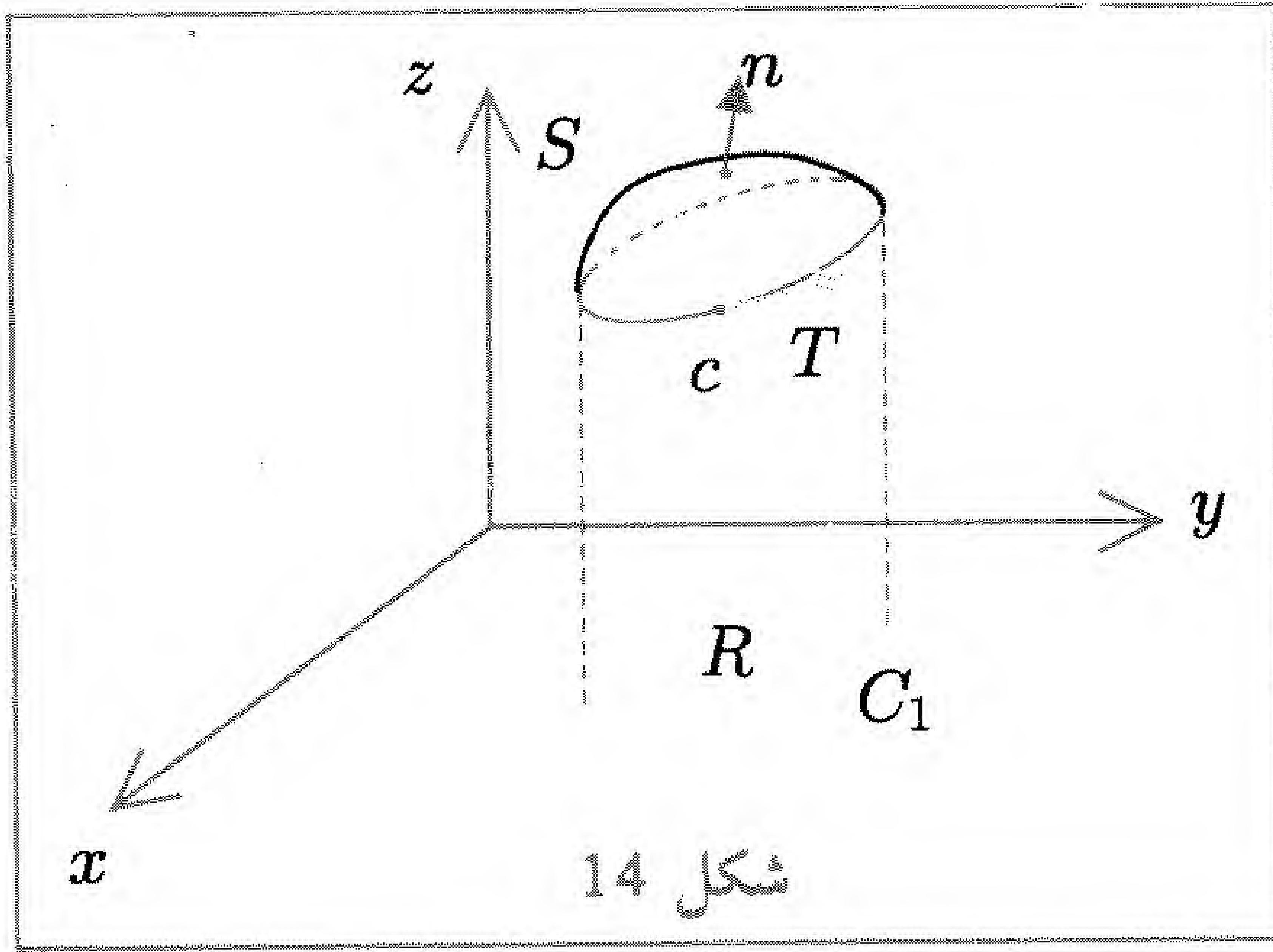
$$T = \frac{dx}{ds}i + \frac{dy}{ds}i + \frac{dt}{ds}k$$

وهكذا يمكن كتابة نظرية جرين كما يلي:

$$\oint_c F.Tds = \iint_R (\nabla \times F).\,KdA$$

وبما أن $(\nabla \times F).k$ يكون مركبة $(curlF)$ في اتجاه محور Z فإنه يسمى المركبة العمودية على R والعلاقة السابقة تنص على ما يلي:

التكامل الخطي للمركبة المماسية (Tangential Component) للمجال F المأخوذة



شكل 14

على استطالة C مرة في الاتجاه الموجب يساوي التكامل الثنائي على المنطقة R للمركبة العمودية (normal component) لالتفاف المجال $(CurlF)F$.

المنحنى C في المستوى يكون حدود R. هذه النتيجة يمكن تقسيمها إلى منحى مغلق بسيط وناعم مقطعياً في ثلاثة أبعاد والذي يكون حدود السطح S.

الشكل 14 يوضح الحالة التي يكون فيها السطح S رسم الدالة $Z = f(x, y)$ حيث أن f لها مشتقات جزئية متصلة من الرتبة الأولى والإسقاط C_1 للمنحنى C على المستوى xy يكون المنحنى الذي يحيط بالمنطقة R، وهي من نوع المناطق الت اعتبرت في نظرية جرين. في الشكل (14).

$\vec{n}$ تكون متجه الوحدة العمودي العلوي على S. الاتجاه الموجب على C يكون الاتجاه الموجب المناظر على C_1 المتجه T يكون متجه الوحدة المماس للمنحنى C ويشير إلى الاتجاه الموجب. إذا كانت F مجالاً متجهاً مركباته لها مشتقات متصلة في المنطقة التي تشتمل على S فإنه يمكن كتابة نظرية ستوكس، نسبة إلى العالم جورج ستكوس (George G.Stokes)، رياضياً كما يلي:

$$\oint_C F.Tds = \iint_S (CurlF).nds$$

ويمكن التعبير عن نظرية ستوكس كما يلي:

التكامل الخطي للمركبة المماسية للمجال F المأخوذة على استطالة C مرة في الاتجاه الموجب تساوي التكامل السطحي للمركبة العمودية لالتفاف $(CurlF)F$ على S. إذا كانت F قوة المجال فإن النظرية تنص على أن الشغل المبذول (Work done) بالقوة F على استطالة C يساوي التدفق ($Flux$) لالتفاف $(CurlF)F$ على S. التكامل الخطي في نظرية ستوكس يمكن كتابته $\oint F.dr$ حيث أن r متجه الموضع للنقطة (s,y,z) على C ولاعتبار حالات أعم يمكن اعتبار سطح دوراني S وتعريف الاتجاه الموجب على استطالة C بصورة ملائمة.

مثال 1

إذا كانت S جزءاً من المجسم المكافىء $Z = 9 - x^2 - y^2$ و$Z \geq 0$ وإذا كانت C رسيم S على المستوى xy فحقق نظرية ستوكس إذا كان المجال المتجه F معرّفاً كما يلي:

$$F = 3zi + 4xi + 4xj + 2yk$$

الحل

المطلوب برهان أن قيمة التكاملين متطابقة.

متجه الوحدة العمودي يكون:

$$n = \frac{2xi + 2yj + k}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

وكذلك

$$CurlF = \begin{vmatrix} i & i & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3z & 4x & 2y \end{vmatrix}$$

$$= 2i + 3j + 4k$$

وبناء على ذلك:

$$\iint_S (CurlF).nds = \iint_S \frac{4x+6y+4}{s\sqrt{4x^2+4y^2+1}} ds$$

ولكن

$$ds = \sqrt{4x^2+4y^2+1} dA$$

وهكذا

$$\iint_S (curlF).nds = \iint_R (4x+6y+4) dA$$

وبتطبيق الإحداثيات القطبية نجد أن:

$$\begin{aligned}\iint_R (4x+6y+4)dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^3 (4rcos\theta + 6rsin\theta + 4r) rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (2cos\theta + 3sin\theta + 2)(9) d\theta \\ &= (9)(2sin\theta - 3cos\theta + 2\theta)\Big|_0^{2\pi} \\ &= (9)(4\pi) = 36\pi\end{aligned}$$

وهكذا

$$\iint_S (CurlF).nds = 36\pi$$

التكامل الخطي في نظرية ستوكس يمكن كتابته كما يلي:

$$\oint_C F.Tds = \oint_C F.dr = \oint_C 3zdx + 4xdy + 2ydz$$

حيث أن C في المستوى xy يكون دائرة نصف قطرها 3:

$$x^2 + y^2 = 9; z = 0$$

إذن التكامل الخطي يختزل إلى:

$$\oint_C F.Tds = \oint_C 4xdy$$

المعادلات البارامترية للدائرة $x^2 + y^2 = 9$

تكون $x = 3cos\theta$ ، $y = 3sin\theta$ ، $0 \leq \theta \leq 2\pi$

وبالتعويض في التكامل السابق نجد أن:

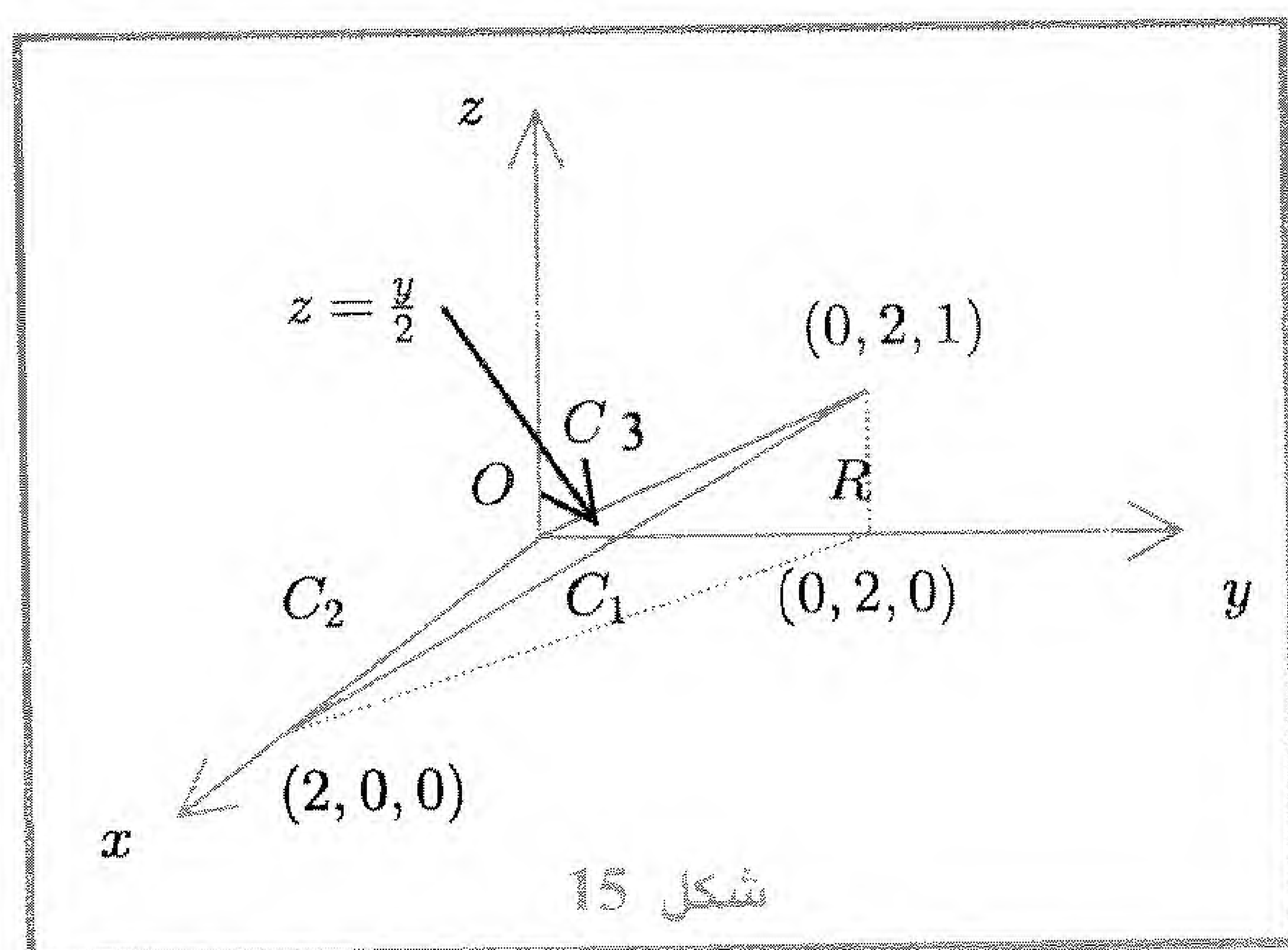
$$\begin{aligned}
\oint_c F.Tds &= \oint_c 4xdy \\
&= 4\int_0^{2\pi} (3cos\theta)d(3sin\theta) \\
&= 36\int_0^{2\pi} cos^2\theta d\theta \\
&= \frac{36}{2}(\theta + \frac{1}{2}sin2\theta\Big|_0^{2\pi} \\
&= 36\pi
\end{aligned}$$

وهي نفس قيمة التكامل السطحي.

مثال 2

أوجد $\int F.dr$ حيث أن C المثلث الدوّاني الموضح بالشكل (15) والذي يقع في المستوى $Z = \frac{y}{2}$ حيث أن:

$$F(x, y, z) = -3y^2i + 4zj + 6xk$$



شكل 15

الحـــل

الطريقة المباشرة لحساب التكامل الخطي تتطلب حساب ثلاثة تكاملات خطية منفصلة كل تكامل على المسارات c_1 ، c_2 ، c_3 والتي يتكون منها المسار c، ولكن يمكن تطبيق نظرية ستوكس ويتطلب حساب تكامل واحد فقط وهو التكامل السطحي $\iint (curlF).nds$ حيث أن S هو سطح المثلث الذي حدوده C ومتجه الوحدة العمودي يكون إلى أعلى. أولاً يحسب الالتفاف للمجال $\vec{F}$ كما يلي:

$$curl\ F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -3y^2 & 4z & 6x \end{vmatrix}$$

$$= -4i - 6j + 6yk$$

ويحسب متجه الوحدة العمودي كما يلي:

$$n = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{-\frac{1}{2}j + k}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1}} = \frac{-j + 2k}{\sqrt{5}}$$

حيث أن $S : f(x, y, z) = z - \dfrac{y}{2}$

ويمكن حساب التكامل السطحي كما يلي

$$\iint\limits_S (curlF).nds = \int_0^2 \int_0^{2-\pi} (-4i - 6j + 6yk).\frac{-j + 2k}{\sqrt{5}}.\frac{\sqrt{5}}{2}\ dy\ dx$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2-x} (3 + 6y)\ dy\ dx$$

$$= 3\int_0^2 (y+y^2)\Big|_0^{2-x} dx$$

$$= 3\int_0^2 (2-x+4-4x+x^2)dx$$

$$= 3\int_0^2 (6-5x+x^2)dx$$

$$= 3\left(6x-5x^2+\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2$$

$$= 3\left(12-10+\frac{8}{3}\right)$$

$$= 14$$

وهكذا

$$\int_c F.dr = 14$$

ملاحظة

$$\text{ds} = \sqrt{\text{fx}^2+\text{fy}^2+1}\ \text{dy dx} = \frac{\sqrt{5}}{2}\ \text{dy dx}$$

مثـــال 3

إذا كان c يمثل تقاطع المجسم المكافىء $z = x^2 + y^2$ والمستوى $z = y$ واتجاه c يكون عكس اتجاه عقارب الساعة عندما ينظر إليه من محور z الموجب فأوجد

$$\int_c xydx + x^2dy + z^2dz$$

الحـــل

واضح أن

$$F = xyi + x^2j + z^2k$$

وبتطبيق نظرية ستوكس

$$\int_c xydx + x^2dy + z^2dz = \int_c F.dr$$

$$= \iint_S (curlF).nds$$

إذا كانت (x, y, z) تقع على c فإن $x^2 + y^2 = y$ وهي معادلة أسطوانة دائرية $r = sin\theta$ وإذا كانت R المنطقة في المستوى xy محددة بالأسطوانة $r = sin\theta$ فإن s يكون رسم المعادلة $z = y$ على R.

ويمكن حساب التفاف المجال F كما يلي:

$$curl\ F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & x^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

وإذا كانت $f(x, y, t) = z - y$ فإن

$$n = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{-j + k}{\sqrt{2}}$$

والآن يمكن حساب التكامل السطحي كما يلي:

$$\iint_S (curlF).nds = \iint_R (xk).\frac{-j + k}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 1dA}$$

$$= \iint_R xdA$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{sin\theta} (rcos\theta)rdrd\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_{0}^{\pi} cos\theta r^3\Big|_0^{sin\theta} d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_{0}^{\pi} cos\theta\ sin^3\theta\ d\theta$$

$$=\frac{1}{12}sin^4\theta\Big|_0^{\pi}=0$$

يمكن استخدام نظرية ستوكس في عدة تطبيقات وتفسيرات فيزيائية ولا يتسع المجال لذكرها هنا ولكن يمكن كتابة نص النظرية التالية للأهمية:

نظرية

إذا كانت المشتقات الأولى لمركبات المجال المتجه F متصلة خلال منطقة بسيطة ومرتبطة (connected) D فإن الشروط التالية تكون متكافئة.

1) F محافظة conservative أي أن $F=\nabla f$ لبعض f

2) $\oint F.dr$ يكون مستقلاً عن المسار في D

3) $\oint F.dr=0$ لكل منحنى مغلق بسيط C في D

4) F غير دورانية أي أن $curlF=\vec{0}$

تمارين 4.5

حقق نظرية ستوكس في الحالات الآتية إلا إذا ذكر غير ذلك:

1) $F=y^2i+z^2j+x^2k$ حيث أن S رسم المستوى $x+y+z=1$ الذي يقع في الثمن الأول.

(2 $F = zi + xj + yk$ و S نصف الكرة $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

(3 $F = x^2i + y^2j + z^2k$ و S جزء المخروط $z = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ المقطوع بالمستوى $z = 1$.

(4 إذا كانت $F = 2yi + e^xj - tan^{-1}xk$، استخدم نظرية ستوكس لإيجاد قيمة التكامل السطحي: $\iint_S (curlF).nds$

حيث أن S جزء المجسم المكافىء $z = 4 - x^2 - y^2$ المقطوع بالمستوى xy.

(5 إذا كانت $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + z)i + (y^2 + x)j + (z^2 + y)k$ وإذا كانت C تقاطع الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ والمخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ فاستخدم نظرية ستوكس لإيجاد قيمة التكامل الخطي: $\int_C F.dr$

(6 استخدم نظرية ستوكس لإيجاد قيمة $\int_C F.dr$

حيث أن C لها اتجاه عكس اتجاه عقارب الساعة في الحالتين التاليتين:

أ) $F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(xi + yk + zk)$ حيث C تقاطع المجسم المكافىء $2z = x^2 + y^2$ والأسطوانة $x^2 + y^2 = 2z$.

ب) $F(x, y, z) = xzi + y^2j + x^2k$ حيث أن C تقاطع المستوى $x + y + z = 5$ والأسطوانة $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

5.5 نظرية التفرق (The Divergence Theorem)

نظرية التفرق تربط بين التكامل على النطاق في ثلاثة أبعاد والتكامل على سطح حدود النطاق، وتعتبر من أهم نظريات التفاضل والتكامل المتجه وتسمى أيضاً نظرية جاوس ونظرية التفرق يمكن برهانها على مناطق معقدة جداً. والبرهان يتطلب تفاصيل كثيرة خارجة عن نطاق هذا الكتاب. وبذلك في هذا البند نفرض أن المنطقة Q يمكن إجراء التكامل الثلاثي عليها ونفرض أن التكامل السطحي يمكن إيجاده على السطح S. ولحسن الحظ أن معظم المناطق التي توجد في التطبيقات من النوع المذكور، وفي هذه المرحلة نكتفي بنص نظرية التفرق وبعض الأمثلة لتوضيحها.

نظرية التفرق

نفرض أن المنطقة Q في ثلاثة أبعاد محددة بالسطح المغلق S و n ترمز إلى المستقيم المتعامد الخارجي على السطح S عند النقطة (x, y, z)، وإذا كانت F دالة متجهة ومشتقاتها الجزئية متصلة على المنطقة Q، فإن:

$$\iint_S F.nd\sigma = \iiint_Q \nabla.Fdv$$
$$= \iiint_Q divFdv$$

حيث أن $d\sigma$ ترمز إلى عنصر المساحة السطحية

مثال 1

إذا كانت المنطقة Q محددة بالمستوى xy ونصف الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ حيث أن $z \geq 0$ وإذا كان المجال المتجه:

$$\vec{F} = \frac{1}{3}(x^3 i + y^3 j + z^3 k)$$

فأوجد $\iint\limits_S F.nd\sigma$ حيث أن S حدود المنطقة Q.

الحـــل

$$\iint\limits_S F.nd\sigma = \iiint\limits_Q \nabla.Fdv$$

$$= \iiint\limits_Q (x^2 + y^2 + z^2)dv$$

وباستخدام الإحداثيات الكروية نجد أن:

$$\iiint\limits_Q (x^2 + y^2 + z^2) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2} \rho^2.\rho^2 sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{32}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\phi \, d\phi \, d\theta$$

$$= \frac{32}{5}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{64\pi}{5}$$

مثـــال 2

استخدم نظرية التفرق لإيجاد $\iint\limits_S F.nd\sigma$ حيث أن:

$$F(x, y, z) = xi + yj + zk$$

والسطح S يتكون من نصف الكرة $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$، والقرص في المستوى xy المحدد بالدائرة $x^2 + y^2 = 1$

الحـــل

$$\iint_S F.nd\sigma = \iiint_Q \nabla.Fdv$$

$$= 3\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \rho^2 sin\phi \; d\rho \; d\phi \; d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\phi d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

مثـــال 3

أوجد قيمة التكامل السطحي

$$\iint_S F.nd\sigma$$

حيث أن S حدود المنطقة المحددة بالأسطوانة $z = 4 - x^2$ وبالمستوى $y + z = 5$ وبالمستويين xy وxz والمجال المتجه يكون

$$\vec{F} = (x^3 + sinz)i + (x^2y + cosz)j + (e^x2 + y^2k)$$

الحـــل

$$\iint_S F.nd\sigma = \iiint_Q \nabla.Fdv$$

$$= \iiint_Q (3x^2 + x^2)dv$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_0^{4-x^2}\int_0^{5-z} (4x^2)dydzdx$$

ويترك للقارىء أن يبين أن قيمة التكامل تساوي 131.66.

تمارين 5.5

استخدم نظرية التفرق لإيجاد قيمة التكامل السطحي:

$$\iint_S F.nd\sigma$$

حيث أن:

1) $F = (x^2 + sinyz)i + (y - xe^{-z})j + z^2k$ وS سطح المنطقة المحددة برسم المعادلات التالية: $x + z = 2, x^2 + y^2 = 4$ و $z = 0$

2) $F(x, y, z) = x^3i + y^3j + z^3k$

حيث أن S السطح المحدد برسم المعادلتين $z = x^2 + y^2$ و $z = 9$.

3) $F(x, y, z) = x^3i + y^3i + z^3k$

حيث أن S سطح المنطقة الواقعة داخل المخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ والكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

حقق نظرية التفرق في الحالات التالية:

4) $F = xi + yj + zk$ والسطح S رسم الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

5) $F = x^2i + y^2j + z^2k$ حيث أن S سطح متوازي المستطيلات المحدد بالمحاور والمستويات $z = a, y = a, x = a$ و $a > 0$

تمارين الفصل الخامس

نظرية جرين

استخدم نظرية جرين لإيجاد قيمة التكاملات الخطية التالية:

1) $\int_c \cos x^2 dx + \sin y^2 dy$ حيث أن c القطاع الناقص $x^2 + 4y^2 = 1$

2) $\int_c -4y dx + 3x dy$ حيث أن c المربع الذي رؤوسه $(\pm 1, \pm 1)$

3) $\int_c x^2 y^2 dx$ حيث أن c المثلث الذي رؤوسه $(3,-2)$، $(3,0)$ ، $(0,0)$

4) $\int_c -2y dx + 3x dy$ حيث أن c حدود المنطقة $0 \le x \le \pi$ و $|y| \le \sin x$

5) حقق نظرية جرين:

$$\int_c (2x - 4y^2 + e^{x+y})dx + (\arctan y + e^{x+y})dy$$

حيث أن c المنحنى في اتجاه عقارب الساعة حول المربع الذي رؤوسه $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$

6) استخدم نظرية جرين لإيجاد الجريان (Circulation) أو الالتفاف (Curl) والتدفق إلى الخارج (Outward flux) للمجال $\vec{F}$ والمنحنى c في الحالات التالية:

أ) $\vec{F} = (x+y)i - (x^2 + y^2)k$

حيث أن c المثلث المحدد بـ $y = 0$ ، $x = 1$ ، $y = x$

ب) $\vec{F} = (x + e^x \sin y)i - (x + e^x \cos y)j$

حيث أن c العروة اليمنى لرسم المعادلة $r^2 = \cos 2\theta$

جـ) $\vec{F} = \left(tan^{-1}\dfrac{y}{x}\right)i - ln(x^2+y^2)j$

حيث أن c المنطقة المحددة بالمتباينات $1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi$

7) استخدم نظرية جرين لحساب مساحة المناطق المحددة بالمنحنيات التالية:

أ) الدائرة $0 \leq t \leq 2\pi,\ r(t) = (acost)i + (asint)j$

ب) القطع الناقص $0 \leq t \leq 2\pi,\ r(t) = (acost)i + (bsint)j$

جـ) المنحنى $0 \leq t \leq 2\pi,\ r(t) = (cos^3t)i + (sin^3t)j$

8) بيّن أن قيمة

$$\oint_c xy^2dx + (x^2y + 2x)dy$$

حول أي مربع تعتمد على مساحة المربع وليس على موقع المربع في المستوى

9) ما هو الشيء الخاص حول التكامل

$$\oint_c 4x^3ydx + x^4dy$$

وضّح إجابتك.

10) إذا كان المشتقات المطلوبة موجودة ومتصلة فبين أنه إذا كانت الدالة $f(x,y)$ تحقق معادلة لابلاس

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

فإن $\oint_c \dfrac{\partial f}{\partial y}dx - \dfrac{\partial f}{\partial x}dy = 0$

على كل المنحنيات المغلقة c والتي تطبق عليها نظرية جرين والعكس صحيح أيضاً.

المساحة السطحية (Surface Area)

11) أوجد مساحة المنطقة المقطوعة من المستوى $x+2y+2z=5$ بالأسطوانة التي جوانبها $x=y^2$ و $x=2-y^2$

12) أوجد مساحة السطح $x^2-2y-2z=0$ التي تقع فوق المثلث المحدد بالمستقيمات $y=3x, y=0, x=2$ في المستوى xy

13) أوجد مساحة جزء المجسم المكافيء $x=4-y^2-z^2$ الذي يقع فوق الحلقة $(ring)$ و$4 \leq y^2+z^2 \leq 1$ في المستوى yz

التكاملات السطحية (Surface integrals)

14) أوجد تكامل الدالة $g(x,y,z)=x+y+z$ على سطح المكعب المقطوع من الثمن الأول (First octant) بالمستويات $z=a, y=a, x=a$

15) أوجد تكامل $g(x,y,z)=xx\sqrt{y^2+4}$ على السطح المقطوع من $y^2+4z=16$ بالمستويات $z=0, x=1, x=0$

نظرية ستوكس (Stokes's Theorem)

استخدم التكامل السطحي في نظرية ستوكس لحساب الجريان (Circulation) للمجال $\vec{F}$ حول المنحنى c في الاتجاه الموضح:

16) $\vec{F}=2yi+3xj-z^2k$

حيث أن c الدائرة $x^2+y^2=9$ في المستوى xy عندما ينظر إليها من أعلى.

17) $\vec{F}=(y^2+z^2)i+(x^2+z^2)j-(x^2+y^2)k$

حيث أن c حدود المثلث المقطوع من المستوى $x+y+z=1$ بالثمن الأول عكس اتجاه عقارب الساعة عندما ينظر إليه من أعلى.

(18 $\vec{F} = x^2y^3i + j + zk$

حيث أن c تقاطع الأسطوانة $x^2 + y^2 = 4$ ونصف الكرة
$x^2 + y^2 + z^2 = 16; z \geq 0$

نظرية التفرق (The divergence Theorem)

(19) حقّق نظرية التفرق إذا كان $F = xi + yj + zk$ على الكرة
$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

(20) استخدم نظرية التفرق لإيجاد التدفق الخارج (Outward flux) خلال حدود المنطقة Ω في الحالات التالية:

أ) $\vec{F} = x^2i + y^2j + z^2k$

Ω المكعب المقطوع من الثمن الأول بالمستويات $z = 1, y = 1, x = 1$

ب) $\vec{F} = yi + xyj - zk$

Ω المنطقة داخل الأسطوانة $x^2 + y^2 \leq 4$ بين المستوى $z = 0$ والمجسم المكافىء $z = x^2 + y^2$.

جـ) $\vec{F} = x^2i + xzj + 3zk$

Ω الكرة المجسمة $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

د) $\vec{F} = x^3i + y^3j + z^3k$

Ω الكرة المجسمة $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$

الفصل السادس

المتتاليات والمتسلسلات اللانهائية

1.6 المتتاليات اللانهائية (Infinite Sequences)

الدالة f عبارة عن تناظر يربط بين كل عنصر $(x \varepsilon X)$ وكل عنصر $(f(x) \varepsilon y)$ حيث أن لكل عنصر في نطاق الدالة f يوجد عنصر واحد فقط في مدى الدالة f وتسمى x نطاق الدالة f وy مدى الدالة f.

وفي هذا الفصل سندرس نوعاً آخر من الدوال.

تعريف 1

المتتالية دالة نطاقها فئة الأعداد الصحيحة التي أكبر من أو تساوي العدد الصحيح m (m عادة 0 أو 1) ومدى المتتالية يكون فئة من الأعداد الحقيقية.

أمثلة للمتتاليات

$$1 , -\frac{1}{2} , \frac{1}{3} , -\frac{1}{4} , ... , \frac{(-1)^{n+1}}{n} , ...$$

$$0 , \frac{1}{2} , \frac{2}{3} , \frac{3}{4} , ... , 1-\frac{1}{n} , ...$$

$$3, 3, 3, 3, ..., 3, ...$$

وبصورة عامة

$$a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...$$

الحد a_n يسمى الحد العام.

ويرمز للمتتالية بالرمز $\{a_n\}$ أو $\{n, a_n\}$. وحسب التعريف السابق المتتالية $\{a_n\}$ هي الدالة f حيث أن $f(n) \equiv a_n$

تعريف 2

المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة من العدد L إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد العدد الصحيح N حيث أن $|a_n - L| < \varepsilon$ لكل $n > N$

وبمعنى آخر إذا كانت المتتالية متقاربة من العدد L، فإن:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

ويسمى العدد L نهاية المتتالية $\{a_n\}$ وإذا كانت النهاية غير موجودة، فإن المتتالية تكون متباعدة.

مثـال 1

بيّن أن المتتالية $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ تقترب (Converges) من الصفر.

الحـل

الحد العام $a_n = \frac{1}{n}$ و $L = 0$

وباستخدام التعريف 2:

$$|a_n - L| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

ولذلك نبحث عن العدد الصحيح N حيث أن $\frac{1}{n} < \varepsilon$ لكل $n > N$

وبالتأكيد $\frac{1}{n} < \varepsilon$ لكل $n > \frac{1}{\varepsilon}$

لاحظ أنه من غير المتوقع أن يكون $\frac{1}{\varepsilon}$ عدداً صحيحاً ولكن يمكن معالجة

ذلك باختيار أي عدد صحيح أن $N > \frac{1}{\varepsilon}$

مثال 2

أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتاليات الآتية وأوجد $\lim_{n\to\infty} a_n$ إذا كانت موجودة وبيّن السبب إذا كان غير ذلك.

أ) $a_n = 1 + (0.1)^n$ ب) $a(n) = 1 + (-1)^n$ جـ) $a_n = -7$

الحل

أ) الحدود الخمسة الأولى $1.1, 1.01, 1.001, 1.00001$ ونهاية المتتالية:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} [1 + (0.1)^n] = 1$$

ب) الحدود الخمسة الأولى $0, 2, 0, 2, 0$. واضح أن النهاية غير موجودة، (لماذا؟).

جـ) الحدود الخمسة الأولى $-7, -7, -7, -7, -7$ وكذلك نهاية المتتالية:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-7) = -7$$

تعريف 3

العبارة $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ تعني أنه لكل عدد حقيقي موجب p يوجد العدد الصحيح N حيث أن $a_n > P$ لكل $n > N$

المتتاليات المحدودة (Bounded Sequences)

المتتالية $\{a_n\}$ تكون محدودة إذا وجد العدد M حيث $|a_n| \leq M$ لكل $n \geq N$. وإذا كان غير ذلك فإن المتتالية تكون غير محدودة (Unbounded).

والنظرية التالية تبين أن المتتاليات المتقاربة تكون دائماً محدودة أو بمعنى آخر المتتاليات غير المحدودة تكون دائماً متباعدة.

نظرية 1

أ) إذا كانت $\{a_n\}$ متقاربة، فإن المتتالية $\{a_n\}$ تكون محدودة.

ب) وإذا كانت $\{a_n\}$ غير محدودة، فإن المتتالية $\{a_n\}$ تكون متباعدة.

البرهان

لبرهان الجزء (أ)

نفرض أن $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ وهذا يعني أنه:

إذا كانت $n \geq N$، فإن $|a_n - L| \leq 1$

وإذا كانت $n \geq N$، فإن $|a_n| = |a_n - L + L| \leq a_n - L| + |L| \leq 1 + |L|$

إذا كانت $M = Max(|a_m|, |a_{m+1}|, ..., |a_{N-1}|, 1 + |L|)$ فإن $|a_n| \leq M$ لكل $n \geq m$ وهكذا تكون المتتالية محدودة.

وبرهان الجزء (ب) يمكن إنجازه من (أ) لأن الجزئين متكافئان منطقياً.

المتتاليات المتزايدة والمتناقصة

المتتالية $\{a_n\}$ متزايدة (Increasing) إذا كان $a_n \leq a_{n+1}$ ومتناقصة (Decreasing) إذا كان $a_n \geq a_{n+1}$.

ومن التعريف السابق نلاحظ أن $\{c\}$ متزايدة ومتناقصة والمتتالية $\{(-1)^n\}$ غير متزايدة وغير متناقصة. حيث أن c مقدار ثابت.

نظرية 2

إذا كانت المتتالية المحدودة متزايدة أو متناقصة، فإنها متقاربة.

يترك البرهان للقارىء.

نظرية 3

نفرض أن $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$ متتاليات لانهائية لكل n حيث

$a_n \le b_n \le c_n$ وإذا كان

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n$$

فإن $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

النظرية السابقة تسمى نظرية الساندويش (The Sandwich Theorem)

البرهان

لكل $\varepsilon > 0$ يوجد العدد M حيث أنه إذا كان $n > M$، فإن $|a_n - L| < \varepsilon$ أو بمعنى آخر $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$.

كذلك $|c_n - L| < \varepsilon$ وهذا يتضمن $L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$ ولذلك إذا كانت $n > M$، فإن $L - \varepsilon < a_n$ و $c_n < L + \varepsilon$

وبما أن $a_n \le b_n \le c_n$ فإنه إذا كانت $n > M$، فإن $L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon$ أو $|b_n - L| < \varepsilon$

مثال 3

أوجد نهاية المتتالية $\left\{\frac{\cos^2 n}{2^n}\right\}$.

الحـل

لاحظ أن $0 \leq cos^2 n \leq 1$ ولذلك $0 \leq \frac{cos^2 n}{2^n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

ولكن واضح أن $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ كما سيتضح من النظرية التالية إذن حسب نظرية الساندويش $\lim_{n\to\infty}\frac{cos^2 n}{2^n} = 0$.

نظرية 4

نفرض أن $\{a_n\}$ متتالية لانهائية، إذا كان $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$ ، فإن $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(يترك البرهان للقارىء).

نظرية 5

1) إذا كان $|r| < 1$ فإن $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ 2) إذا كان $|r| > 1$ فإن $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$

البرهان

إذا كان $r = 0$ واضح أن $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$.

نفرض أن $0 < |r| < 1$، ولبرهان الجزء الأول نستخدم التعريف 2.

يجب أن نبين أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد العدد الصحيح N حيث أنه إذا كان $n > N$، فإن $|r^2 - 0| < \varepsilon$ وهذا يتضمن $|r^2| < \varepsilon$. وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للمتباينة الأخيرة نجد أن:

$$n > \frac{ln\varepsilon}{ln|r|} \qquad \text{أو} \qquad nln|r| < ln\varepsilon$$

لاحظ تغير إشارة المتباينة، لأن $ln|r|$ سالب حيث أن $r < |r| < 1$ ولكن $\varepsilon < 1$ ونفرض أن $N = \dfrac{ln\varepsilon}{ln|r|}$، وهذا يبرهن صحة النظرية في الحالة الأولى $N > 0$.

ولبرهان الحالة الثانية، نعتبر أي عدد حقيقي موجب P، $|r|^n < P$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين $nln|r| > lnP$ وهذا يتضمن $n > \dfrac{lnP}{ln|r|}$

وإذا تم اختيار $N = \dfrac{lnP}{ln|r|}$، فإن $|r|^n > P$ لكل $n > N$ وهكذا $\lim_{n\to\infty} |r|^n = \infty$ حسب التعريف 3

نظرية 6

إذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = M$ حيث L, M عددان حقيقيان، فإن:

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = L + M$

2) $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = L - M$

3) $\lim_{n\to\infty}(a_n \times b_n) = L \times M$

4) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{L}{M}$ حيث $M \neq 0$

النظرية 6 مشابهة تماماً لنظرية نهاية الدالتين f وg حيث يمكن اعتبار $f(n) = a_n$ و $g(n) = b_n$

مثال 4

ناقش تقارب أو تباعد المتتالية: $\left\{\dfrac{1-5n^4}{n^4+8n^3}\right\}$

الحل

لمعرفة سلوك المتتالية يفضل كتابة الحدود الأولى:

$$\frac{-4}{9}, \frac{-69}{80}, -\frac{404}{297}, \dots$$

ونهاية المتتالية $\lim_{n\to\infty} \frac{1-5n^4}{n^4+8n^3} = -5$

إذن المتتالية تقترب من -5

نظرية 7

نفرض أن الدالة f معرفة في الفترة $[m,\infty)$ حيث أن $f(n) = a_n$ لكل $n \ge m$.

1) إذا كانت $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$، فإن $\{a_n\}$ متقاربة و $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

وإذا كانت $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$، فإن $\{a_n\}$ متباعدة و $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$

وهكذا

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

2) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ والدالة f متصلة عند L، فإن $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$

البرهان

1) نفرض أن $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

إذن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد العدد الصحيح N حيث أنه إذا كان $x \ge N$، فإن $|f(x) - L| < \varepsilon$

إذا كانت $n \ge N$، فإن $|a_n - L| = |f(n) - L| < \varepsilon$

ولذلك $\lim_{n\to\infty} a_n = L$، وإذا كانت $\lim_{n\to\infty} f(n) = \pm\infty$، فإن المتتالية $\{a_n\}$ غير محدودة وهكذا فهي متباعدة أو $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$

2) ولبرهان الجزء الثاني، نفرض أن $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

وبما أن الدالة f متصلة عند L، فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد العدد $\delta > 0$ حيث أنه إذا كان $|x - L| < \delta$ فإن $f(x) - f(L) < \varepsilon$. ولكن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ فرضاً، ولذلك يوجد العدد الصحيح N حيث أنه إذا كان $n \geq N$، فإن $|a_n - L| < \delta$ أو $|f(a_n) - L| < \varepsilon$

وهذا يعني $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(L)$

مثـال 5

إذا كانت $a_n = (-1)^{n+1}(\frac{1}{n})$، فبيّن أن $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

الحـل

حدود المتتالية متناوبة (Alternating)، ولتوضح ذلك نكتب الحدود الخمسة الأولى

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$$

وبما أن $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

إذن $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ حسب النظرية (4).

مثـال 6

أوجد $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ إذا كان $a_n = cos n\pi$

الحـل

لاحظ أن $cos n\pi = (-1)^n$ ولكن $(-1)^n$ متتالية متباعدة لأن $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ غير موجودة.

مثـــال 7

أوجد نهاية المتتالية artctan (n)

الحـــل

واضح أن $\lim_{n\to\infty} arctan(n) = \frac{\pi}{2}$

مثـــال 8

أوجد نهاية المتتالية $\{(-1)^n n^3 3^{-3}\}$

الحـــل

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3^n}$$

وباستخدام قاعدة لوبتال من السهل أن نبين:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3^n} = 0$$

وبتطبيق النظرية (4) نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n n^3 3^{-n} = 0$$

مثـــال 9

بيّن إذا كانت المتتاليات الآتية $\{a_n\}$ متقاربة أو متباعدة مع ذكر السبب وأوجد نهاية كل متتالية متقاربة.

أ) $a_n = sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right)$ ب) $a_n = 2 + (-1)^n$ جـ) $a_n = \frac{1 + (-1)^n}{n}$

د) $a_n = nsin\left(\frac{1}{n}\right)$ هـ) $a_n = (-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

الحـل

أ) $\lim_{n\to\infty} sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right) = sin\frac{\pi}{2} = 1$ ولذلك المتتالية تقترب من 1

ب) $\lim_{n\to\infty}(2+(-1)^n) = \begin{cases} 1 & ; n \text{ فردية} \\ 3 & ; n \text{ زوجية} \end{cases}$ وهذا يتضمن أن النهاية غير موجودة، أي أن المتتالية متباعدة.

جـ) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+(-1)^n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

أي أن المتتالية تقترب من الصفر.

د) $\lim_{n\to\infty} nsin\left(\frac{1}{n}\right)$، يمكن كتابة النهاية كما يأتي:

$$\lim_{n\to\infty} nsin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

ولذلك المتتالية تقترب من 1

هـ) $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right) = \pm 1$، النهاية غير معرّفة ولذلك المتتالية متباعدة.

مثال 10

بيّن أن $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

الحل

نفرض أن $y = n^{\frac{1}{n}}$ وبأخذ لوغاريتم الطرفين $lny = \frac{1}{n} lnn$

وهكذا $\lim\limits_{n\to\infty} lny = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} lnn = 0$

أي أن $\lim\limits_{n\to\infty} y = e^0 = 1$

مثال 11

بيّن أن $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ لكل قيم x

الحل

بما أن $\frac{|x^n|}{n!} \le \frac{x^n}{n!} \le -\frac{|x^n|}{n!}$

والآن نريد أن نبيّن:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^n|}{n!} = 0$$

الخطوة الأولى نختار العدد الصحيح M حيث أن $|x| < M$ و $M < n$ ولذلك:

$$\frac{|x|}{M} < 1 \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{|x|}{M}\right)^n = 0$$

ويمكن كتابة $\frac{|x^n|}{n!}$ كما يأتي:

$$\frac{|x^n|}{n!} = \frac{|x|^n}{1.2...M.(M+1)(M+2)...n}$$

لاحظ أن $(M+1)(M+2)...n$ تساوي $n-M$ عاملاً (Factors).

ولذلك:

$$\frac{|x^n|}{n!} = \frac{|x|^n}{1.2...M.(M+1)...n} \leq \frac{|x|^n}{M!M^{n-M}} = \frac{|x|^n M^M}{M!M^n} = \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n$$

وهكذا

$$0 \leq \frac{|x^n|}{n!} \leq \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n = 0$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n = 0$

وحسب نظرية الساندويش $\lim_{n\to\infty}\frac{|x^n|}{n!} = 0$

مثـــال 12

بيّن أن $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

الحـــل

نفرض أن $a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$، وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين:

$$ln\ a_n = n\ ln\ \left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

وبذلك:

$$\lim_{n\to\infty}(ln\ a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

وبتطبيق قاعدة لوبتال:

$$\lim_{n\to\infty} Ln \frac{\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\right)\left(-\frac{x}{-x^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+\frac{x}{n}} = x$$

وهذا يتضمن $\lim_{n\to\infty} a_n = e^x$ لكل قيم x

ملاحظة

عند التعويض مباشرة $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1^\infty$ وهي كمية غير معرّفة.

تمارين

أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتاليات الآتية وبيّن أي المتتاليات متقاربة وأيها متباعدة وأوجد نهاية كل متتالية متقاربة.

1) $a_n = \frac{n}{2^n}$

2) $a_n = 7^{\frac{1}{n}}$

3) $a_n = tan^2\left(\frac{2}{n-1}\right) - sec^2\left(\frac{2}{n-1}\right)$

4) $a_n = 100^n$

5) $a_n = n\,\pi\,cos\,n\,\pi$

6) $a_n = n(1 - cos\frac{1}{n})$

7) $a_n = sinh(ln\ n)$

8) $a_n = \frac{1-2^n}{3^n}$

9) $a_n = sin^2 n - cos^2 n + cos2n$

10) استخدم الآلة الحاسبة أو الحاسب الآلي لإيجاد الجذر التربيعي للعدد 3 مرات متتالية أو بمعنى آخر:

$$3^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{8}}, 3^{\frac{1}{16}}, \ldots$$

كرّر العمل لأعداد مختلفة بحيث تشتمل على الأعداد الموجبة التي أكبر أو أصغر من 1 ماذا تلاحظ؟

هل $\lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}}$ عندما تكون $x > 0$ موجودة؟ وهل تختلف قيم النهاية باختلاف قيم x؟

أوجد قيمة النهايات التالية:

11) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$ 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n$ 13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n.6^n}{2^{-n}.n!}$

ناقش المتتاليات الآتية:

14) $\left\{n^{n^2}\right\}$ 15) $\{n^{(\frac{n}{lnn})}\}$ 16) $\left\{\dfrac{tan^{-1}n}{n}\right\}$

17) $\left\{\dfrac{n-tan^{-1}n}{n-sinn}\right\}$

18) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 19) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

20) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)$

2.6 تقارب أو تباعد المتسلسلات اللانهائية

المتسلسلة النهائية تكتب على الصورة التالية:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

ومجموع المتسلسلة يمكن الحصول عليه بجمع الحدود من a_1 إلى a_n

والمتسلسلة اللانهائية هي عبارة عن تعميم للصورة السابقة حيث تكتب كما يأتي:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

وهي غير منتهية.

تعريف 4

المجموع الجزئي من الرتبة n للمتسلسلة اللانهائية يكتب على الصورة التالية:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

حيث أن $S_1 = a_1$ ، $S_2 = s_1 + a_2$ ، $S_3 = s_2 + a_3$، . . . الخ.

ويعرف مجموع المتسلسلة اللانهائية كما يأتي:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

أو باستخدام علامة الجمع $\sum$ يمكن كتابة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

وإذا كانت النهاية غير موجودة، فإن المجموع غير معرّف.

إذا كانت $\lim_{n\to\infty} S_n$ موجودة فإن المتسلسلة متقاربة وإذا كان غير ذلك فإن المتسلسلة متباعدة.

تكتب المتسلسلة الهندسية على الصورة التالية:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ... + ar^n + ...$$

حيث أن a و r مقداران ثابتان وتأتي التسمية لأن المقدار ar^n هو المتوسط الهندسي للمقدارين: ar^{n+1} و ar^{n-1}

إذا كانت $r = 1$ فإن المجموع الجزئي

$$S_n = a + a + ... + a = na$$

وعندما $n \to \infty$ فإن $S_n \to \infty$ أي أن المتسلسلة متباعدة.

وإذا كانت $r \neq 1$ نعتبر المجموع الجزئي

$$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^n + ... \qquad (1)$$

وبضرب (1) في الأساس r نجد أن:

$$rS_n = ar + ar^2 + ... + ar^{n+1} + ... \qquad (2)$$

وبطرح (2) من (1) نحصل على ما يأتي:

$$S_n - rS_n = a - ar^{n+1}$$

ويمكن كتابة المقدار السابق على الصورة التالية:

$$S_n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^{n+1}}{1-r}$$

وهكذا $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r} \lim\limits_{n\to\infty} r^{n+1}$

وإذا كانت $|r| < 1$، فإن $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$ وبذلك $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$

وإذا كانت $|r| > 1$، فإن النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n+1}$ غير موجودة وهذا يتضمن عدم وجود $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ وفي هذه الحالة تكون المتسلسلة متباعدة.

والنظرية التالية تبين سلوك حدود المتسلسلة المتقاربة.

نظرية 9

إذا كانت المتسلسلة .. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n +$ متقاربة فإن:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

البرهان

يمكن كتابة المجموع الجزئي للمتسلسلة كما يأتي:

(1) $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ أو (2) $S_{n-1} = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + ..$

وبطرح المعادلة (2) من (1) نجد أن:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

وبأخذ نهاية الطرفين:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

ملاحظة

عكس النظرية غير صحيح فمن الممكن أن نجد $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ وتكون المتسلسلة $\sum a_n$ متباعدة.

نتيجة 1

إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

والنتيجة السابقة تعرف أحياناً باختبار التباعد.

يمكن إجراء عمليات الجمع والطرح و(الضرب في مقدار ثابت) على المتسلسلات المتقاربة كما يتضح من النظرية التالية:

نظرية 10

إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربتين و c مقداراً ثابتاً، فإن المتسلسلات التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}(c\ a_n)$$

تكون متقاربة وكذلك المتسلسلات:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n\ ,\ \sum_{n=1}^{\infty}(c\ a_n) = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

تكون متقاربة أيضاً

يترك البرهان كتمرين للقارئ.

مثـال 1

بيّن أن المتسلسلة التالية $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة وأوجد مجموعها.

يمكن استخدام الكسور الجزئية:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1} \quad \text{أو} \quad 1=A(n+1)+Bn$$

بوضع $n=0$ نجد أن $A=1$ وبوضع $n=-1$ فإن $B=-1$

وهكذا يمكن كتابة المتسلسلة كما يأتي:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

والمجموع الجزئي للمتسلسلة يكتب على الصورة التالية:

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

واضح أن $\lim_{n\to\infty} S_n=1$

إذن المتسلسلة متقاربة ومجموعها يؤول إلى 1 عندما تؤول n إلى ∞.

مثـال 2

ناقش المتسلسلة التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} cos\ n\ \pi$$

الحـــل

$S_1 = cos\ \pi = -1$ ، $S_2 = S_1 + cos\ 2\pi = 0$ ، $S_3 = S_2 + cos\ 3\pi = -1$ . . . الخ.

واضح أن مجموع المتسلسلة يكون -1 إذا كانت n فردية ويساوي الصفر إذا كانت n زوجية، أي أن النهاية غير موجودة وهذا يتضمن أن المتسلسلة متباعدة.

مثـــال 3

أوجد مجموع المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$$

الحـــل

لتجزئة الكسر نستخدم الكسور الجزئية:

$$\frac{4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

أو $$4 = A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1)$$

بوضع $n = 0 \Leftarrow A = 2$، وبوضع $n = -1 \Leftarrow B = -4$

وكذلك عندما $n = -1$ نجد أن $C = 2$

وهكذا يمكن كتابة الدالة القياسية على الصورة التالية:

$$\frac{4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n} - \frac{4}{n+1} + \frac{2}{n+2}$$

$$= \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}\right) - \left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2}\right)$$

وبذلك يمكن كتابة المجموع الجزئي للمتسلسلة على الصورة:

$$S_n = \left\{(2-1)-\left(1-\frac{2}{3}\right)\right\}+\left\{\left(1-\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\right)\right\}+\left\{\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{4}\right)-\left(\frac{2}{4}-\frac{2}{5}\right)\right\}$$
$$+\ldots+\left\{\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right)-\left(\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n+2}\right)\right\}$$
$$=1-\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n+2}$$

وعندما $n \to \infty$، فإن $S_n \to 1$

مثـال 4

أوجد مجموع المتسلسلتين التاليتين:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n \quad ، \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{6^n}$$

الحـل

المتسلسلة الأولى تكتب كما يأتي:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{6^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

لاحظ أن المتسلسلتين في الجانب الأيمن هندسيتان وبذلك:

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

والمتسلسلة الثانية $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n$

واضح أنها هندسية حيث أن $r=\frac{1}{e}$، ومجموعها $S=\frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{e-1}$

مثـــال

بيّن ما إذا كانت المتسلسلة التالية:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\ldots+\frac{n}{2n+1}+\ldots$$ متقاربة أو متباعدة.

الحـــل

يمكن استخدام اختبار التباعد نتيجة (1) حيث أن:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\neq 0$$

إذن المتسلسلة متباعدة.

تمارين 2.6

حدّد إذا كانت المتسلسلات التالية متقاربة أو متباعدة وأوجد نهاية كل متسلسلة متقاربة.

1) $$3+\frac{3}{-5}+\ldots+\frac{3}{(-5)^{n-1}}+\ldots$$

2) $$1+\left(\frac{e}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{e}{3}\right)^{n-1}+\ldots$$

3) $$0.35+0.0035+\ldots+\frac{35}{(100)^n}+\ldots$$

4) $$\frac{-1}{(1)(2)}+\frac{-1}{(2)(3)}+\ldots+\frac{-1}{n(n-1)}+\ldots$$

5) $$\frac{1}{(4)(5)}+\frac{1}{(5)(6)}+\ldots+\frac{1}{(n+3)(n+4)}+\ldots$$

6) $$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2})^{n-1}$$

7) $$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$$

8) $\sum_{n=2}^{\infty}(0.33)^n$ 9) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{7}\right)^n$

عبّر عن كل كسر من الكسور التالية على صورة عدد قياسي

10) 0.012012012 11) 24.818181 12) 27.5431313

13) إذا كان الحد الأول من متسلسلة هندسية 3 والحد الخامس $\frac{16}{27}$ فأوجد مجموع المتسلسلة اللانهائية.

14) إذا كان $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ فأوجد $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

برهن على صحة ما يأتي:

15) $$3+(x-1)+\frac{(x-1)^2}{3}+...+\frac{(x-1)^n}{3^{n-1}}+...=\frac{9}{4-x}$$

حيث أن $x\in(-2,4)$

16) $$\frac{1}{2}+\frac{x-3}{2^2}+\frac{(x-3)2}{2^3}+\frac{(x-3)^3}{2^4}+...+\frac{(x-3)^n}{2^{(n+1)}}+...=\frac{1}{5-x}$$

حيث أن $x\in(1,5)$

17) كرة من المطاط أسقطت من ارتفاع 100 متر. إذا كانت ترتد ربع المسافة بعد كل صدمة بالرصيف، أوجد المسافة الأفقية التي تقطعها الكرة قبل وصولها إلى حالة السكون.

18) قطاران كل منهما يسير بسرعة 15 ميلاً في الساعة من محطتين متناظرتين وعندما كانت المسافة بينهما ميلاً واحداً، بدأت نحلة الطيران ذهاباً وإياباً بين القطارين بسرعة 30 ميلاً في الساعة، عبِّر عن المسافة التي تقطعها النحلة قبل اصطدام القطارين كمتسلسلة لانهائية وأوجد مجموعها.

3.6 المتسلسلات اللانهائية ذات الحدود الموجبة

درسنا في البند السابق بعض المتسلسلات الهندسية وبعض المتسلسلات التي يمكن معالجتها باستخدام الكسور الجزئية، إلا أن هذه المتسلسلات تمثل نسبة قليلة جداً من المتسلسلات التي سنتناولها والتي يستحيل إيجاد مجموعها الجزئي. وفي هذا البند نقدم بعض الطرق غير المباشرة لمعرفة تقارب أو تباعد المتسلسلات والتي يمكن تطبيقها فقط على المتسلسلات ذات الحدود الموجبة أو المتسلسلات غير السالبة، والاختبارات أو الطرق التي يمكن تطبيقها على المتسلسلات غير السالبة، والاختبارات أو الطرق التي يمكن تطبيقها على المتسلسلات ذات الحدود الموجبة والسالبة سنقدمها في البنود التالية.

نظرية 11

إذا كان $a_n \leq 0$ حيث أن $n = 1, 2, 3, ...$ والمجموع الجزئي $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$، فإنه:

1) يوجد عدد M حيث أن $S_n \leq M$ وفي هذه الحالة تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة أو تقترب من القيمة S حيث $S \leq M$.

أو

2) $S_n \to \infty$ وتكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

البرهان

يمكن كتابة الحد العام كما يأتي $a_n = S_n - S_{n-1} \geq 0$

ولذلك المجموع الجزئي S_n عبارة عن متتالية متزايدة أو متتالية غير متناقصة إذا كان $S_n \leq M$ فإن المتتالية S_n يكون لها نهاية لأنها غير متناقصة ومحدودة،

وهذا يتضمن $S_n \to S \leq M$.

وإذا لم يوجد العدد M فإنه لكل عدد E مهما كان كبيراً، فإن $S_n > E$ و$S_m \geq S_n$ حيث أن $m > n$، وهذا يعني $S_n \to \infty$.

والنظرية التالية تعتبر من أهم النظريات لاختبار تقارب أو تباعد المتسلسلات وتسمى اختبار المقارنة.

نظرية (12) اختبار المقارنة (Comparison Test)

نفرض أن $a_n \geq 0$

أ) إذا كان $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلة متقاربة، و $a_n \leq b_n$ لكل قيم n، فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة و$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

ب) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متسلسلة متباعدة حدودها غير سالبة و$a_n \geq b_n$ لكل قيم n، فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

البرهان

نفرض أن $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ و $\hat{S}_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$ حيث أن S_n و$\hat{S}_n$ متتاليتان غير متناقصتين.

في الحالة (أ) نفرض أن S نهاية المتتالية S_n، ولكن $\hat{S}_n \leq S_n \leq S$ لكل قيم n.

وبتطبيق نظرية (11) نستنتج أن $\hat{S}_n$ متقاربة، وفي الحالة (ب) $S_n \to \infty$ و$\hat{S}_n \geq S_n$ لكل قيم n وبذلك $\hat{S}_n \to \infty$ عندما n تؤول إلى ∞.

ملاحظة

لتطبيق النظرية السابقة نحتاج إلى معرفة عدد كبير من المتسلسلات المتقاربة أو المتباعدة، ويمكن أن يتحقق ذلك بعد دراسة النظرية التالية وحل أكبر عدد ممكن من التمارين.

نظرية (13) اختبار التكامل (The Integral Test)

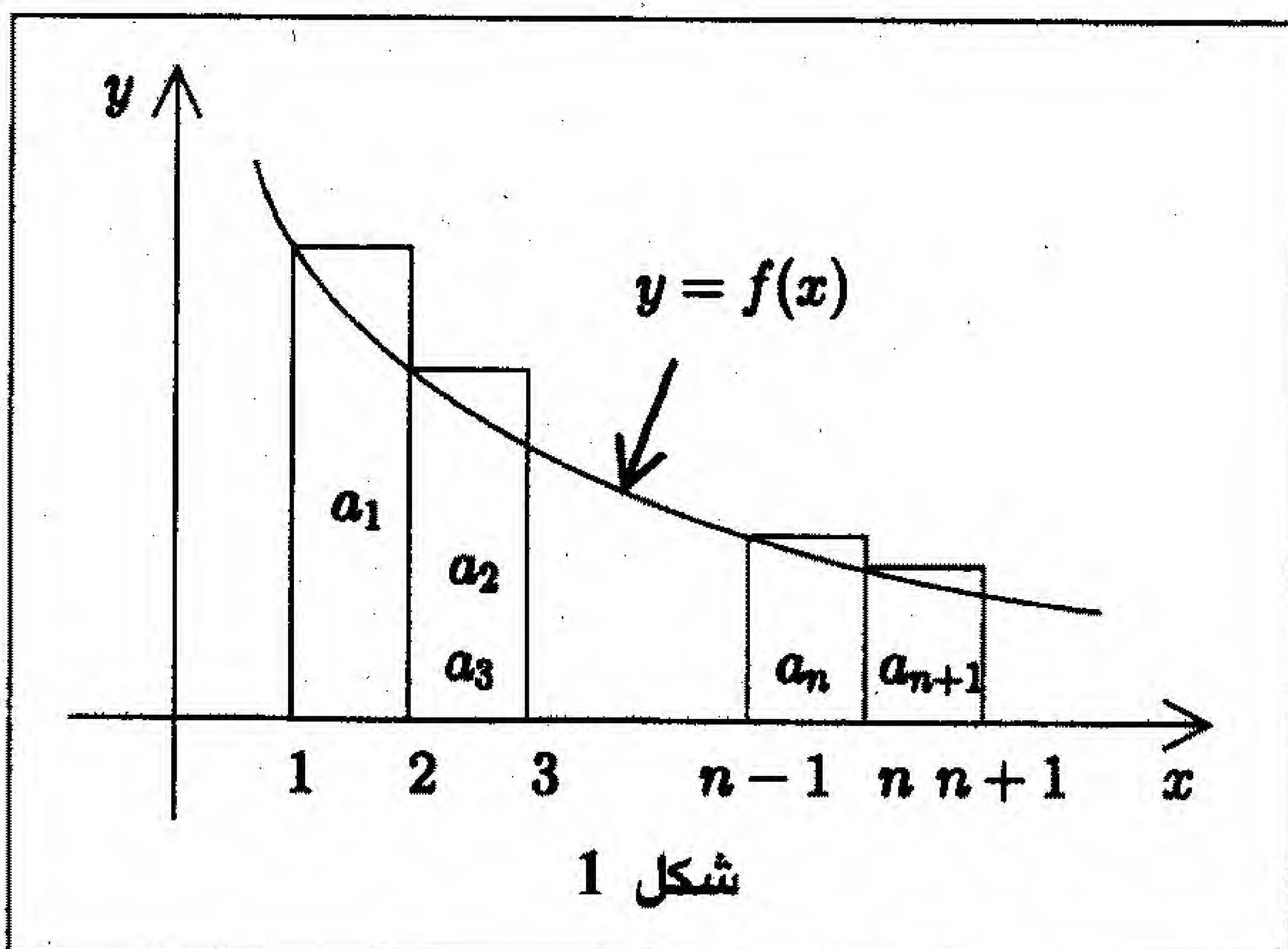
نفرض أن الدالة f متصلة، غير سالبة، متناقصة، ومعرّفة لكل $x \geq 1$ وإذا كان $a_n = f(n)$ لكل $n \geq 1$، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ والتكامل المعتل $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ متقاربان معاً أو متباعدان معاً.

البرهان

بما أن الدالة f متناقصة حيث أن $f(n) = a_n$ لكل n، فإن:

$$\int_1^{n+1} f(x)\, dx \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_n \qquad (1)$$

أنظر الشكل (1) حيث تمثل $a_1, a_2, \ldots, a_n$ مساحات المستطيلات.

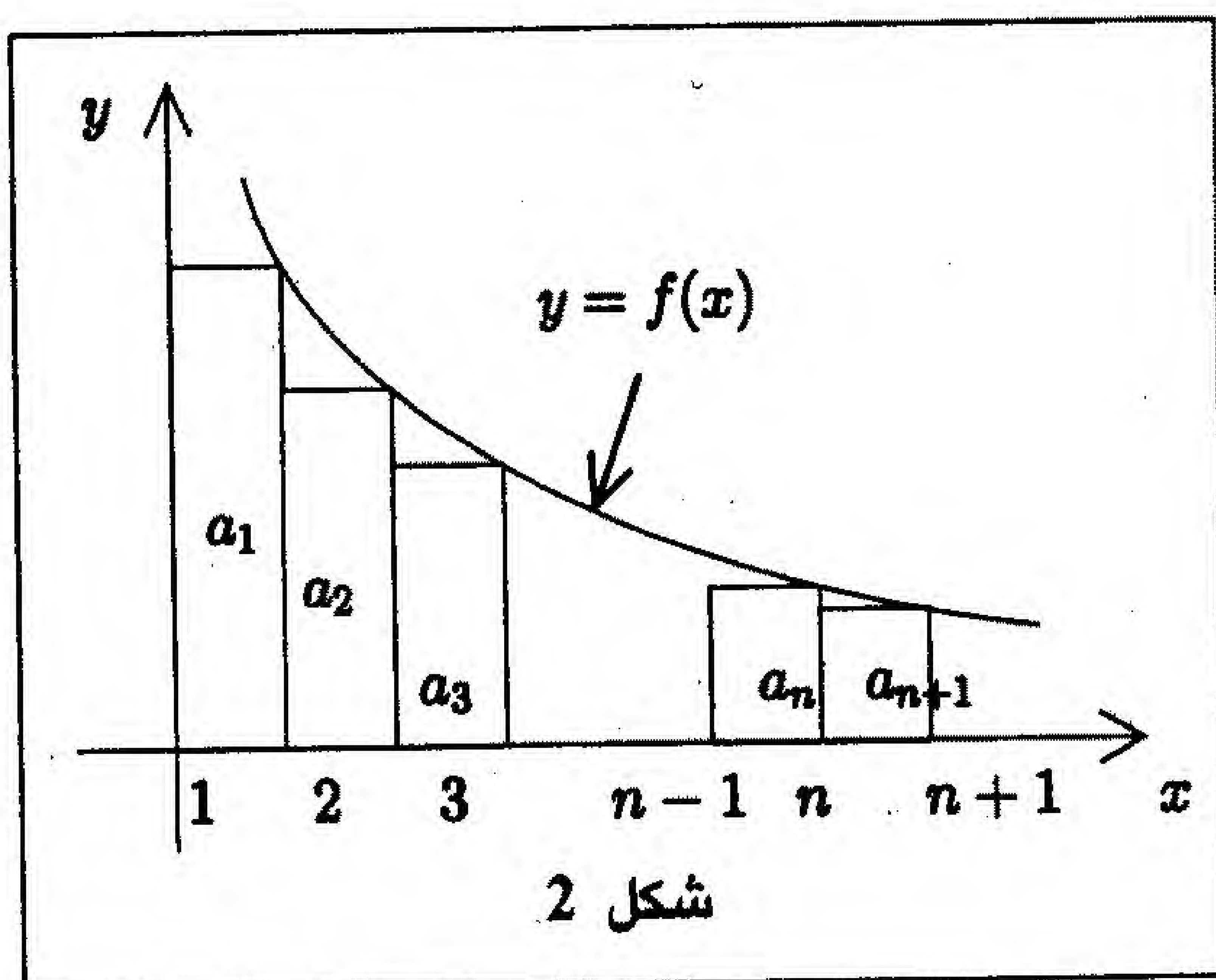


شكل 1

وإذا كانت المتسطيلات تقع تحت رسم الدالة، فإن:

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_n \leq \int_1^n f(x)\,dx$$

حيث تم إهمال a_1، انظر الشكل (2)



شكل 2

وإذا اعتبرنا a، فإن:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)\,dx \tag{2}$$

من (1) و(2) نستنتج أن:

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)\,dx \tag{3}$$

وإذا كان للتكامل $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ نهائياً، فإن $\sum_{n=1}^{n} a_n$ نهائي (لماذا؟).

نظرية 14

المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ وهي تعرف بمتسلسلة P تكون متقاربة إذا كانت $P > 1$ ومتباعدة إذا كانت $P \leq 1$.

يترك البرهان كتمرين للقارئ.

مثـــال 1

ناقش تقارب أو تباعد المتسلسلة التالية

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

الحـــل

نبدأ أولاً بكتابة الحدود الأولى للمتسلسلة.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+...$$

$$=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3.2}+\frac{1}{4.3.2}+\frac{1}{5.4.3.2}+..$$

لاحظ أن كل حد ما عدا الحد الأول والثاني أصغر من $\frac{1}{2}$، أي أن:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$$

ولكن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ متسلسلة هندسية حيث أن $r=\frac{1}{2}$ وباستخدام اختبار المقارنة، نستنتج أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ متقاربة.

مثـــال 2

بيّن أن المتسلسلة التالية متقاربة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

الحـل

لاحظ أن $\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2}$ لكل n ولكن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متسلسلة متقاربة (لماذا؟).

وبتطبيق اختبار المقارنة، نستنتج أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة.

مثـال 3

بيّن أن المتسلسلة التالية متقاربة.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{cos^2 n}{n!}$$

الحـل

لاحظ أن $\frac{cos^2 n}{n!} \leq \frac{1}{n!}$ لكل $n \geq 0$ ولكن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ متقاربة (مثال 1)

وبتطبيق اختبار المقارنة نستنتج أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos^2 n}{n!}$ متقاربة.

مثـال 4

بيّن إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - 1}$ متقاربة أو متباعدة.

الحـل

أولاً نحاول مقارنة المتسلسلة المذكورة بالمتسلسلة المتقاربة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

ولكن $\frac{1}{3^n - 1} \geq \frac{1}{3^n}$ لكل $n \geq 1$ ولكن هذا لا يتماشى مع اختبار المقارنة ولا نستطيع أن نحدد ما إذا كانت المتسلسلة متقاربة أو متباعدة بمقارنتها بالمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

ولكن من الواضح $\frac{1}{3^n - 1} \leq 3\frac{1}{3^n}$ أو $\frac{1}{3^n - 1} \leq \frac{1}{3^{n-1}}$

وهذا يتضمن أن المتسلسلة متقاربة.

ملاحظة

بصورة عامة عند محاولة برهان ما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة أو متباعدة بتطبيق اختبار المقارنة، يتم اختيار المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واختيار مقدار ثابت c حيث أن $c \neq 0$ بشرط أن تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة و$a_n \leq c\, b_n$ أو $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة و$a_n \geq c\, b_n$ لكل $n \geq 1$. وإيجاد المقدار c ليس بالأمر البسيط وفي هذه الحالات يمكن أن يكون الاختبار التالي سهل التطبيق.

نظرية (15) نهاية اختبار المقارنة (Limit Comparison Test)

نفرض أن المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ غير سالبتين، ونفرض أن $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ حيث أن L عدد موجب و $L \neq 0$.

أ) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة، فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

ب) إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة، فإن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة.

البرهان

بما أن $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ ، فإنه يوجد عدد صحيح N حيث أن

$\frac{1}{2}L \le \frac{a_n}{b_n} \le 2L$ لكل $n \ge N$.

ولذلك $a_n \le 2Lb_n$ و $a_n \ge \frac{1}{2}Lb_n$ لكل $n \ge N$ ومن هاتين المتباينتين واختبار المقارنة نستنتج أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متقاربة، وكذلك $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متباعدة إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ متباعدة.

مثال 5

استخدم نهاية اختبار المقارنة لتحديد إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^3-n-1}$ متقاربة أو متباعدة.

الحل

لإيجاد المتسلسلة التي يتم بها مقارنة المتسلسلة المعطاة نهمل كل الحدود في البسط والمقام ما عدا الحدين اللذين يشتملان على أكبر قوة للمتغير n أو بمعنى آخر $\frac{n^2-1}{n^3-n-1} = \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$.

وبذلك

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^3-n-1}(n) = 1$$

إذن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^3-n-1}$ متباعدة لأن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة لأنها متسلسلة P حيث أن $P=1$ (المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ تسمى متسلسلة توافقية).

مثال 6

ناقش ما إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^4+3)^{\frac{4}{7}}}$ متقاربة أو متباعدة.

الحل

بطريقة مماثلة للمثال السابق $b_n = \frac{n^2}{n^{\frac{16}{7}}} = \frac{1}{n^{\frac{2}{7}}}$

وبذلك

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n^4+3)^{\frac{4}{7}}} \left(n^{\frac{2}{7}}\right) = 1$$

وبما أن المتسلسلة $\sum \frac{1}{n^{\frac{2}{7}}}$ متباعدة (لماذا؟)

هذا يتضمن أن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^4+3)^{\frac{4}{7}}}$ متباعدة

مثال 7

ناقش المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{ln\ n}}$

الحل

بتطبيق اختبار التكامل حيث أن $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{ln\ x}}$

وهكذا

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{ln\ x}}\,dx$$

$$= \int_2^{\infty} (ln\ x)^{-\frac{1}{2}} d(ln\ x)$$

$$= 2\sqrt{ln\ x}\Big|_2^{8} = \infty$$

أي أن التكامل المعتل لانهائي أو متباعد وبذلك تكون المتسلسلة متباعدة أيضاً.

تمارين 3.6

بيّن إذا كانت المتسلسلات التالية متقاربة أو متباعدة:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2+3n+2}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n-6)}{n^4}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n+3}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln(n+1)}{(n+1)^5}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln\, n}{n\sqrt{n}}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n!}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{tan^{-1}}{n^2+1}(n)$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(ln\, n)^2}$

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{n^2}}$

12) $\sum_{n=1}^{\infty} n\, sin\frac{1}{n}$

13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+4n^3+1}{2n^8+n^4+2}$

15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln\, n}{n^4}$

16) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n$

برهن على ما يأتي:

17) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ و $\sum b_n$ متباعدة، فإن $\sum a_n$ متباعدة.

18) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ و $\sum b_n$ متقاربة، فإن $\sum a_n$ متقاربة.

4.6 المتسلسلات المتناوبة (Alternating Series)

المتسلسلة التي حدودها تتناوب الإشارة الموجبة والسالبة تسمى متسلسلة متناوبة ويمكن التعبير عن المتسلسلة المتناوبة بالصورة التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_n + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1}a_n + \dots$$

أو

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots + (-1)^{n}a_n + \dots$$

حيث أن $a_n > 0$ لكل n

وتعتبر النظرية التالية الرئيسية لاختبار تقارب المتسلسلة المتناوبة.

نظرية (16) اختبار المتسلسلة المتناوبة (Alternating Series Test)

إذا كان $a_n \geq a_{n+1}$ لكل n و $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ، فإن المتسلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ تكون متقاربة.

البرهان

نعتبر المجموع الجزئي للحدود الزوجية

$$S_2, S_4, S_6, \dots$$

ولكن $S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2n-1} - a_{2n})$

و $a_n - a_{n+1} \geq 0$ لكل n

أي أن $0 \leq S_2 \leq S_4 \leq \dots \leq S_6 \leq ..$

والمجموع الجزئي S_{2n} يمكن أن يكتب على الصورة التالية أيضاً.

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

وبذلك $S_{2n} \le a_1$ لكل عدد موجب صحيح n

وهكذا

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \le a_n$$

وإذا اعتبرنا المجموع الجزئي S_{2n+1}، فإن:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = 0$$

لأن $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$

وهذا يتضمن $\lim_{n\to\infty} S_n = S \le a_1$

أي أن المتسلسلة متقاربة.

نظرية 17

نفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ متسلسلة متناوبة حيث أن $0 < a_{n+1} < a_n$ لكل n

وإذا كان $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$، فإن الخطأ الناتج عن تقريب مجموع المتسلسلة S بالمجموع الجزئي S_n أقل عددياً من a_{n+1}.

البرهان

يمكن كتابة الباقي R_n كما يأتي:

$$R_n = S - S_n = (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots)$$

وهكذا

$$|R_n| = |S - S_n| = |a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots|$$

وبطريقة مماثلة لبرهان النظرية (16) يمكن أن نبين:

$$|R_n| = |S - S_n| < a_{n+1}$$

وهو المطلوب.

مثـال 1

حدِّد إذا كانت المتسلسلات التالية متقاربة أو متباعدة.

أ) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3+1}{n^3+1}$

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{4n^2-3}$

جـ) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n}{4n-3}$

الحـل

لكي نطبق اختبار المتسلسلة المتناوبة يجب أن نبيّن ما يأتي:

i) $a_n \geq a_{n+1}$ لكل n

ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ولبرهان (i) يجب أن نبيّن إحدى الحالات التالية:

1) $f(n) < 0$ 2) $a_n - a_{n+1} \geq 0$ 3) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$

أ) $f(n) = \frac{n^2+1}{n^3+1}$

وبأخذ المشتقة f نجد أن

$$f(n) = \frac{(n^3+1)(2n) - (n^2+1)(3n^2)}{(n^3+1)^2}$$

$$= \frac{2n - (n^4+3n^2)}{(n^3+1)^2} < 0$$

إذن الدالة f متناقصة وهذا يعني $a_n \geq a_{n+1}$

وبما أن $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1} = 0$

إذن المتسلسلة متقاربة.

جـ)
$$a_n - a_{n+1} = \frac{2n}{4n-3} - \frac{2n+2}{4n+1}$$
$$= \frac{6}{(4n-3)-(4n+1)} > 0$$

وهذا يتضمن $a_n > a_{n+1}$

ولكن
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{4n-3} = \frac{1}{2} \neq 0$$

وبذلك تكون المتسلسلة متباعدة. ويترك (ب) كتمرين للقارئ.

مثال 2

بيّن أن المتسلسلة المتناوبة
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)!}$$
متقاربة وأوجد القيمة التقريبية للمجموع إلى ثلاثة أرقام عشرية.

الحل

المتسلسلة تحقق شروط اختبار المتسلسلة المتناوبة وبذلك فهي متقاربة ولمعرفة عدد الحدود التي يمكن اعتبارها نجرب مثلاً الحد الرابع:
$$a_4 = \frac{1}{8!} = \frac{1}{8.7.6.5.4.3.2}$$
$$= \frac{1}{40320} = 0.0000248$$

وبذلك يمكن أخذ مجموع الحدود الأربعة الأولى فقط ويكون الخطأ أقل من 0.0000248

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4.3.2.1} + \frac{1}{6.5.4.3.2}$$
$$= -1 + 0.5 - 0.416666 + 0.0013888 = -0.542778$$

تمارين 4.6

ناقش المتسلسلات التالية:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+4}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{e^n}{n^4}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\sqrt{n+1}}{8n+5}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{3n+4}{5n+7}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\sqrt{n+1}}{8n+5}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1+4^n}{1+3^n}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n\, ln\, n}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

أوجد القيمة التقريبية للخطأ إذا تم اعتبار الحدود الأربعة الأولى فقط لكل من المتسلسلات التالية:

9) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

10) $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} t^n$

11) $ln(1.01) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{(0.01)^n}{n}$

12) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^5}$

5 . 6 التقارب المطلق (Absolute Convrgence)

المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ تكون متقاربة مطلقاً إذا كانت المتسلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$$

متقاربة .

وإذا كانت حدود المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ موجبة، فإن $|a_n| = a_n$ وفي هذه الحالة التقارب المطلق هو التقارب المعتاد.

والنظرية التالية تنص على أن التقارب المطلق يتضمن التقارب المعتاد.

نظرية 18

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقاً، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة .

البرهان

حسب خواص القيمة المطلقة : $-|a_n| \leq |a_n \leq |a_n|$ لكل n

وهكذا $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$

وبتطبيق اختبار المقارنة نستنتج أن المتسلسلة $(a_n + a_n|)$ متقاربة .

ويمكن كتابة المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ كما يأتي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

وهكذا المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة .

تعريف 5

المتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة شرطا إذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة و$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متباعدة.

مما سبق يمكن تصنيف المتسلسلات اللانهائية كما يأتي:

1) متقاربة مطلقاً 2) متقاربة شرطاً 3) متباعدة

وتعتبر النظرية التالية من أهم اختبارات التقارب المطلق.

نظرية 19 اختبار النسبة (The Ratio Test)

نفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة لانهائية حدودها غير صفرية.

أ) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$ ، فإن المتسلسلة متقاربة مطلقاً.

ب) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ أو $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ ، فإن المتسلسلة متباعدة.

ج) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ ، فإنه لا يمكن استنتاج شيء.

ملاحظة

في الحالة الأخيرة يمكن أن تكون المتسلسلة متقاربة مطلقاً أو متقاربة شرطاً أو متباعدة، ويجب استخدام أحد الاختبارات الأخرى.

البرهان

أ) نفرض أن $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$ ، وإذا كان r أي عدد حيث أن $0 \leq L < r < 1$، فإنه يوجد عدد صحيح N حيث أن $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r$ لكل $n \geq N$

وهذا يتضمن

$$|a_{N+1}| < |a_N| r$$

واضح أن
$$|a_{N+2}| < |a_{N+1}| r < |a_N| r^2$$

وبصفة عامة
$$|a_{N+m}| < |a_N| r^m$$

حيث أن $m > 0$

وبتطبيق اختبار المقارنة، المتسلسلة

$$|a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \ldots + |a_{N+m}| + \ldots$$

متقاربة لأن حدودها أصغر من الحدود المناظرة لها في المتسلسلة الهندسية المتقاربة:

$$|a_N| r + |a_N| r^2 + \ldots + |a_N| r^n + \ldots$$

وبما أن إهمال عدد نهائي من الحدود لا يؤثر على تقارب أو تباعد المتسلسلة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متقاربة، أي أن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة مطلقاً.

ب) نفرض أن $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ ، وإذا كان r عدداً حيث أن $1 < r < L$ فإنه يوجد عدد صحيح N حيث أن $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > r > 1$ لكل $n \geq N$

وهكذا $|a_{n+1}| > |a_n|$ إذا كانت $n \geq N$

وبذلك $\lim_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$ و $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$، وحسب اختبار التباعد، فإن المتسلسلة متباعدة.

ويبرهن على الحالة $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ بالطريقة نفسها.

جـ) اختبار النسبة لا يعطي أي معلومات مفيدة إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$، وفي الحقيقة فإنه من السهل أن نبيّن أن النهاية السابقة 1 لكل من المتسلسلات التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \, , \, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2} \, , \, \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

على الرغم من أن المتسلسلة الأولى متقاربة مطلقاً والثانية متقاربة شرطاً والأخيرة متباعدة.

والنظرية التالية مفيدة إذا كان a_n يشتمل على قوى n ومن عيوبها أنه لا يمكن تطبيقها إذا كان a_n يحتوي على $n!$.

نظرية 20 اختبار الجذر (The Root Test)

نفرض أن $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة لانهائية.

أ) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$، فإن المتسلسلة متقاربة مطلقاً.

ب) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ أو $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$، فإن المتسلسلة متباعدة.

جـ) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$، فإنه لا يمكن استنتاج أي شيء.

وبرهان هذه النظرية مشابه لبرهان اختبار النسبة ويترك كتمرين للقارئ.

وبعد دراسة الاختبارات المختلفة التي يمكن تطبيقها لمعرفة سلوك المتسلسلة اللانهائية من حيث التقارب أو التباعد يجب الإجابة عن السؤالين التاليين.

1) هل الاختبارات المذكورة كافية لدراسة كل المتسلسلات اللانهائية؟

2) ما هو الاختبار المناسب الذي يمكن تطبيقه على متسلسلة ما؟

الإجابة

1) هناك متسلسلات لا يمكن الحكم عليها أو معرفة سلوكها بالاختبارات المذكورة وتحتاج إلى مهارة عالية، واستخدام طرق متقدمة.

2) اختيار الاختبار المناسب، يحتاج إلى مهارة يمكن اكتسابها بحل أكبر عدد ممكن من التمارين.

وعند دراسة المتسلسلات اللانهائية $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ يمكن اتباع الخطوات التالية:

1) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$، فإن المتسلسلة متباعدة.

2) إذا كانت $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$، فاتبع الخطوات التالية:

أ) إذا كانت حدود المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ موجبة فاستخدم أحد الاختبارات التالية:

1 ـ اختبار المقارنة. 2 ـ نهاية اختبار المقارنة. 3 ـ اختبار التكامل.
4 ـ اختبار النسبة. 5 ـ اختبار الجذر.

ملاحظة

عند استخدام الاختبار (1) أو (2) اعتبر متسلسلة P أو المتسلسلة الهندسية، استخدم اختبار التكامل إذا كانت الدالة $f(n) = a_n$ سهلة التكامل، واستخدم اختبار النسبة أو اختبار الجذر إذا وجد مضروب (factorial) أو أس في الحد العام.

ب) وإذا كانت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متسلسلة متناوبة، اتبع ما يأتي:

1 ـ استخدم اختبار المتسلسلة المتقاربة أو

2 ـ طبّق أحد الاختبارات في (أ) على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$، إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ متقاربة، فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة.

جـ) وإذا كانت حدود المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ غير موجبة وإذا كانت المتسلسلة غير متناوبة، فطبق أحد الاختبارات في (أ) على المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

مثال 1

بيّن أن المتسلسلة التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$$

متقاربة مطلقاً.

الحل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

والمتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة لأنها متسلسلة P حيث أن $P = 2$ وبذلك تكون المتسلسلة المتناوبة متقاربة مطلقاً.

مثال 2

بيّن إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$ متقاربة مطلقاً أو شرطاً.

الحـــل

بتطبيق اختبار النسبة

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} < 1$$

أي أن المتسلسلة متقاربة مطلقاً.

مثـــال 3

ناقش تقارب المتسلسلة التالية: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n^{1000}}$

الحـــل

بتطبيق اختبار النسبة $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{(n+1)^{1000}}\cdot\frac{n^{1000}}{(2n)!}$

$$= \lim_{n\to\infty}(2n+2)(2n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{1000}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(2n+2)(2n+1)\left(\frac{n}{1+\frac{1}{n}}\right)^{1000} = \infty$$

إذن المتسلسلة متباعدة

مثـــال 4

حدّد إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n+1}}{n^n}$ متقاربة أو متباعدة.

الحـــل

بتطبيق اختبار الجذر

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{3n+1}}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{3+\frac{1}{n}}}{n} = 0 < 1$$

إذن المتسلسلة متقاربة.

مثــال 5

حدّد إذا كانت المتسلسلة : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ متقاربة أو متباعدة.

الحــل

بتطبيق اختبار النسبة:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$$

إذن المتسلسلة متقاربة.

مثــال 6

ناقش تقارب أو تباعد المتسلسلة : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$

الحــل

واضح أن المتسلسلة متقاربة إذا كان $x = 0$ وفي حالة $x \neq 0$، يمكن استخدام اختبار النسبة.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}x^{n+1}\right)\left(\frac{n^n}{n!x^n}\right)$$

$$=\frac{(n+1)n^n x}{(n+1)^{n+1}}=\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n x$$

وهكذا

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{|x|}{e}$$

أي أن المتسلسلة متقاربة مطلقاً إذا كان $|x|<e$ أو $x\in(-e,e)$ ومتباعدة في الحالات الأخرى.

مثال 7

بيّن أن المتسلسلة: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+2}x^{2n+1}$

متقاربة مطلقاً إذا كان $|x|<1$، ومتقاربة شرطاً إذا كان $|x|=1$، ومتباعدة إذا كان $|x|>1$.

الحل

واضح أن المتسلسلة متقاربة عندما $x=0$، وإذا كانت $x\neq 0$، فإن:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{x^{2n+3}}{3n+5}\cdot\frac{3n+2}{x^{2n+1}}\right|$$

وهكذا

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=|x^2|$$

أي أن المتسلسلة متقاربة مطلقاً إذا كان $|x|<1$ ومتباعدة إذا كان $|x|>1$.

وعندما $x = 1$، المتسلسلة المتناوبة $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n+2}$

متقاربة لأن $a_n > 0$ $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$ و $a_n > a_{n+1}$ (اختبار المتسلسلة المتناوبة) ولكن $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$ متباعدة (لماذا؟).

وهذا يتضمن أن المتسلسلة متقاربة شرطاً إذا كان $|x| = 1$.

تمارين 5.6

ناقش تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية وإذا كانت المتسلسلة متقاربة بيّن ما إذا كان التقارب مطلقاً أو شرطاً.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{1}{ln\ n}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n(ln\ n)^2}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right)$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n!}{100^n}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-100)^n}{n!}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{n^2+4}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{5^n(n+1)}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{arctan(n)}{n^2}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos\ n - 1}{n^{\frac{3}{2}}}$

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sec^{-1} n}{tan^{-1} n}$

(13 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)}{n^2}$

(14 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln\ n}{(1.01)^n}$

(15 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{n^5}$

(16 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)ln\ (n+1)}$

(17 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 5^n}{(2n)!}$

(19 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-7)^{n-1}}{n.n!}$

6.6 متسلسلات القوى (Power Series)

تكتب متسلسلة القوى على الصورة التاليةك

$$C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + ... + C_n(x-a)^n + ...$$

حيث أن $C_1, C_2, ..., C_n$، a مقادير ثابتة.

وإذا أخذت x قيمة معينة، فإن متسلسلة القوى تؤول إلى إحدى المتسلسلات اللانهائية التي درسناها في البنود السابقة.

وعندما $a = 0$ تأخذ متسلسلة القوى الصورة التالية:

$$C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_nx^n + ...$$

والصورة الأخيرة تتكرر دائماً.

وكما في المتسلسلات اللانهائية يرمز للمتسلسلتين السابقتين كما يأتي:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n(x-a)^n \quad \text{و} \quad \sum_{n=1}^{\infty} C_nx^n$$

وإذا كانت متسلسلة القوى متقاربة لبعض قيم x يمكن تعريف الدالة في المتغير x كما يلي:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x-a)^n \quad \text{أو} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_nx^n$$

ويمكن استخدام اختبار النسبة لدراسة سلوك (تقارب أو تباعد) متسلسلة القوى كما سيتضح من الأمثلة المحلولة.

نظرية تمهيدية

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ متقاربة، فإنه يوجد عدد M حيث أن $|a_n| \le M$ لكل n.

البرهان

تقارب المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ يتضمن أن $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ وحسب تعريف النهاية فإنه يوجد عدد N حيث أن $|a_n| < 1$ لكل $n > N$ (نضع $\varepsilon = 1$ في تعريف النهاية).

وبفرض أن M تساوي القيمة العظمى للأعداد التالية:

$$|a_0|\ ,\ |a_1|\ ,\ |a_2|\ ,\ \dots\ ,\ |a_N|\ ,\ 1$$

أي أن $M = Max\{|a_0|\ ,\ |a_2|\ ,\ |a_2|\ ,\ \dots\ ,\ |a_N|\ ,\ 1\}$

نحصل على النتيجة المطلوبة.

نظرية 21

إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة عندما $x = x_1 \neq 0$، فإن المتسلسلة متقاربة مطلقاً لكل x حيث أن $|x| < |x_1|$ ويوجد عدد M حيث أن:

$|a_n x^n| \leq M\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ لكل n.

البرهان

بما أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة، إذن حسب النظرية التمهيدية السابقة يوجد عدد M حيث أن $|a_1 x_1^n| \leq M$ لكل n.

وبذلك $|a_n x^n| = \left|a_n x_1^n \frac{x^n}{x_1^n}\right| = |a_n x_1^n| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leq M\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$

ولكن المتسلسلة الهندسية $\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ متقاربة لأن $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$

وحسب اختبار المقارنة، المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^2$ متقاربة مطلقاً.

نظرية 22

إذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متسلسلة القوى، فإنه تكون إحدى النقاط التالية صحيحة.

1) المتسلسلة متقاربة فقط إذا كانت $x = 0$

2) المتسلسلة متقاربة مطلقاً لكل قيم x.

3) يوجد عدد موجب r حيث تكون المتسلسلة متقاربة مطلقاً إذا كان $|x| < r$ ومتباعدة إذا كان $|x| > r$.

يترك البرهان كتمرين للقارئ.

وفيما يلي سنقدم بعض الأمثلة.

مثال 1

أوجد فترة تقارب متسلسلة القوى: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$

الحل

باستخدام اختبار النسبة

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n+1}} x^{n+1} \cdot \frac{\sqrt{n}}{x^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} |x| = |x|$$

ومن اختبار النسبة نستنتج أن المتسلسلة متقاربة إذا كان $|x| < 1$ والتسلسلة متباعدة إذا كان $|x| > 1$.

عندما $x = 1$ و $x = -1$ نحصل على المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

ويترك للقارئ أن يبين أن المتسلسلة الأولى متباعدة، والثانية متقاربة وهذا يتضمن أن فترة التقارب $[-1,1)$ أو $-1 \le x < 1$

مثال 2

أوجد فترة تقارب المتسلسلة التالية: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$

الحل

بتطبيق اختبار النسبة نجد أن:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n+1} x^{n+1} \cdot \frac{n}{x^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}|x| = |x|$$

أي أن المتسلسلة متقاربة إذا كان $|x| < 1$ ومتباعدة إذا كان $|x| > 1$ وعندما $|x| = 1$ فإن اختبار النسبة لا يعطي أي معلومات مفيدة، ولكن عندما $x = 1$ نحصل على المتسلسلتين $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ حيث أن $x = 1$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ حيث أن $x = -1$

المتسلسلة الأولى متباعدة لأنها متسلسلة توافقية (متسلسلة P) حيث أن $P = 1$ والمتسلسلة الثانية متقاربة (اختبار المتسلسلة المتناوبة).

أي أن متسلسلة القوى متقاربة في الفترة $[-1,1)$ أو $-1 \le x < 1$.

مثال 3

ناقش تقارب المتسلسلة التالية: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n!)^2(x-2)^n}{2^n(2n)!}$

الحـل

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{((n+1)!)^2(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}(2n+2)!} \cdot \frac{2^n(2n)!}{(n!)^2(x-2)^2}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{2(2n+2)(2n+1)}|x-2|$$

وهكذا
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{8}|x-2|$$

وهذا يتضمن أن المتسلسلة متقاربة إذا كان

$|x-2| < 8$ أو $-8 < x-2 < 8 \Leftarrow -6 < x < 10$

ويترك للقارئ مناقشة سلوك (تقارب أو تباعد) المتسلسلة عند نقطتي النهاية.

تمارين 6.6

أوجد فترة تقاربة المتسلسلات التالية وناقش سلوك كل متسلسلة عند نقطتي النهاية:

(1 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$

(2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{4^n.1.3.5...(2n-1)}$

(3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x+1)^n}{5^n}$

(4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x+4)^n}{3^n.n^2}$

(5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(ln\ n)2^n x^n}{3^n n^2}$

(6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ln\ n}{2^n}(x-e)^n$

(7 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)!}x^n$

(8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{10^n}(x-5)^n$

(9 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{= \sqrt{3n+4}}(3x+4)^n$

(10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.4.6...(2n)}{4.7.10...(3n+1)}$

11) إذا كانت $\sum a_n$ متقاربة مطلقاً فبرهن على أن $\sum a_n x^n$ متقاربة مطلقاً لكل x في الفترة $[-1,1]$.

12) إذا كانت فترة تقارب المتسلسلة $\sum a_n x^n$ هي $(-r,r)$ فبرهن على أن المتسلسلة متقاربة شرطاً عندما $x = r$

13) إذا كان r نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum a_n x^n$، فبرهن على أن $\sqrt{r}$ هو نصف قطر تقارب المتسلسلة $\sum a_n x^{2n}$.

14) أوجد نصف قطر تقارب المتسلسلتين التاليتين:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cn)!}{(n!)} x^n \quad ، \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+c)!}{n!(n+d)!}$$

حيث أن c و d مقداران ثابتان.

15) إذا كانت المتسلسلة متقاربة مطلقاً عند أحد نقطتي نهاية فترة التقارب، فبين أن المتسلسلة متقاربة مطلقاً عند نقطة النهاية الأخرى.

7.6 الدوال ومتسلسلات القوى

يمكن استخدام متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ لتعريف الدالة f التي نطاقها فترة تقارب المتسلسلة.

أي أنه لكل x في فترة تقارب المتسلسلة يمكن كتابة $f(x)$ كما يأتي:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n^n + ...$$

والصيغة السابقة تمكننا من إيجاد القيمة التقريبية للدالة f عند النقطة c كما يلي:

$$f(c) \approx a_0 + a_1 c + a_2 c^2 + ... + a_n c^n + ...$$

مشتقات متسلسلات القوى

بما أن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ تمثل دالة نطاقها فترة تقارب المتسلسلة فمن الطبيعي أن تكون المتسلسلة قابلة للتفاضل في فترة تقاربها وعلاوة على ذلك المشتقة يمكن إيجادها من متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (حد بحد) بطريقة مماثلة لإيجاد مشتقة متعددة الحدود.

نظرية 24 (تفاضل متسلسلات القوى)

إذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متسلسلة القوى ونصف قطر تقاربها $R > 0$، فإن $\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$ لها نفس نصف قطر التقارب $(R > 0)$

و $$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}(a_n\, x^n)$$

لكل $|x| < R$.

يترك البرهان كتمرين للقارئ.

ملاحظة

على الرغم من أن النظرية (24) تنص على أن نصف قطر تقارب متسلسلة القوى يساوي نصف قطر تقارب مشتقتها فإن هذا لا يتضمن تساوي فترتي تقارب المتسلسلتين.

كذلك النظرية نفسها تنص على أن متسلسلة القوى المتقاربة التي نصف قطر تقاربها يختلف عن الصفر، قابلة للتفاضل مرة واحدة، ولكن المشتقة هي متسلسلة قوى ويمكن تفاضلها وهذا يعني أن المتسلسلة الأصلية يمكن تفاضلها مرتين، وبتكرار العملية نستنتج أن متسلسلة القوى التي نصف قطر تقاربها $R > 0$ لها مشتقات من كل الرتب في الفترة $(-R, R)$ وقيم المشتقات عند 0 لها علاقة بالأعداد $a_0, a_1, a_2, \ldots$ كما يتضح من النظرية التالية.

نظرية 25

إذا كان نصف قطر تقارب متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ هو $R > 0$.
وإذا كانت $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ حيث أن $x \in (-R, R)$، فإن الدالة f لها مشتقات من كل الرتب في فترة التقارب و $f^{(n)}(0) = n! a_n$ لكل $n \geq 0$ وبناء على ذلك

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

حيث أن $x \in (-R, R)$.

البرهان

بالتعويض عن $x = 0$ في الدالة $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بعد فك المتسلسلة نجد أن:

$$f(0) = f^{(0)}(0) = a_0 = 0!a_0$$

وبتفاضل الدالة f: $\quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$

وكذلك بالتعويض عن $x = 0$ بعد فك المتسلسلة نجد أن

$$f'(0) = a_1 = 1!a_1$$

وبصورة مماثلة

$$f''(0) = 2a_2 = 2!a_2$$

وبصورة عامة

$$f^{(n)}(0) = n!a_n$$

وبالتعويض عن a_n نحصل على الصورة التالية:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

نتيجة

نفرض أن متسلسلتي القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ متقاربتان في الفترة $(-R, R)$ حيث أن $R > 0$

إذا كان $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ لكل $x \in (-R, R)$، فإن $a_n = b_n$ لكل $n \geq 0$

البرهان

نفرض أن $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = f(x)$ حيث $x \in (-R, R)$ وبتطبيق النظرية (25) نجد أن:

$$a_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = b_n$$

نظرية 26 (تكامل متسلسلات القوى)

إذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ متسلسلة القوى ونصف قطر تقاربها $R > 0$ حيث أن $x \in (-R < R)$، فإن:

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_n\, t^n\, dt\right)$$

البرهان

بما أن المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ متقاربة مطلقاً في الفترة $(-R, R)$ وبما أن:

$$\left|\frac{a_n x^n}{n+1}\right| \leq |a_n x^n|$$

المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n+1}$ متقاربة (بتطبيق اختبار المقارنة) حيث أن $x \in (-R, R)$

وبذلك المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ متقاربة أيضاً حيث أن $x \in (-R, R)$

وحسب النظرية الأساسية للتفاضل والتكامل (راجع الجزء الأول).

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, t^n\, dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$$

وبتطبيق نظرية تفاضل متسلسلات القوى:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)a_n}{n+1}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n$$

وهكذا

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,t^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+C$$

وباعتبار $x=0$ نجد أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+C=0$$

أي أن $c=0$ وهذا يبرهن الطرف الأيسر.

وبرهان الطرف الايمن يأتي من النظرية التالية:

$$\int_0^x t^n dt=\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

مثـــال 1

بيّن أن $\frac{d}{dt}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

الحـــل

المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ متقاربة لكل x (لماذا؟).

وحسب نظرية تفاضل متسلسلات القوى النظرية (24)، فإن $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}$ متقاربة أيضاً

و
$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n-1=0}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$=\sum_{n-1=0}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

ويمكن الحصول على النتيجة المطلوبة بوضع $n=n-1$ في المتسلسلة اليمنى.

ملاحظة

بما أن $f(0)=1$ ، فإن $f(x)=e^x$ لكل x.

أي أن

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^n}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...$$

مثال 2

برهن على صحة : $ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$

حيث أن $|x|<1$.

الحل

واضح أن $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

حيث أن $|x|<1$

وبوضع $x=-t$ نحصل على الصورة التالية:

$$\frac{1}{1+t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n \qquad (*)$$

حيث أن $|t|<1$

وبتكامل الطرفين، وبتطبيق نظرية تكامل متسلسلات القوى نجد أن:

$$ln(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+t}dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, t^n\right)dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

حيث أن $|x|<1$

ملاحظة

$$ln(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+t}dt$$

مثـال 3

بيّن أن $arctan\, x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$

لكل $|x|<1$

الحـل

إذا كانت $|t|<1$، فإن $|t^2|<1$ وبذلك يمكن التعويض عن t بـ t^2 في المثال السابق أي أن:

$$\frac{1}{1+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ t^{2n};|t|<1$$

وبتطبيق نظرية تكامل متسلسلات القوى:

$$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ t^{2n}\right)dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x(-1)^n\ t^{2n}dt\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\ ;\ |x|<1$$

ملاحظة

بوضح $x=1$ نجد أن

$$\frac{\pi}{4}=\arctan(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

وللحصول على دقة مناسبة يتطلب جمع أكثر من 500 حد وتسمى المتسلسلة السابقة بمتسلسلة ليبنيز.

مثـــال 4

أوجد متسلسلة القوى التي تمثل الدالة f حيث أن:

$$f(x)=\frac{x^2}{1-x^2}$$

الحـــل

لاحظ أن $\frac{1}{1-x^2}$ متسلسلة هندسية يمكن أن تكتب على الصورة التالية:

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 = x^8 + ...$$

وبذلك

$$\frac{x^2}{1-x^2} = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + ...$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2(n+1)}$$

حيث أن $|x| < 1$

مثـــال 5

استخدم المتسلسلات اللانهائية لإيجاد القيمة التقريبية للتكامل التالي:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1+x^6} dx$$

إلى أربعة أرقام عشرية صحيحة.

الحــل

$$\frac{1}{1+x^6} \approx 1 - x^6 + x^{12}$$

وبتكامل الطرفين

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1+x^6} dx \approx x - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{13}x^{13} \Big|_0^{\frac{1}{3}}$$

$$\approx \frac{1}{3} - 0.0000653 \approx \frac{1}{3}$$

حيث اعتبر الحد الأول فقط والإجابة صحيحة إلى اربعة أرقام عشرية.

تمارين 7.6

أوجد متسلسلات القوى التي تمثل $f(x)$ وأوجد فترة التقارب.

(1 $f(x)=\dfrac{x^3}{4-x^3}$ (2 $f(x)=\dfrac{x}{2-3x}$

(3 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ (4 $f(x)=x^2e^{-x}$

أوجد فترة التقارب لكل من المتسلسلات التالية:

(5 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{4^n}x^n$ (6 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^{n+1}n^2}x^n$

(7 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4^{n+1}}{\pi^{n+2}}x^{n+3}$ (8 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n(3^{n+2})}x^{n+1}$

(9 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n!}$ (10 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{(2n)!}\,x^n$

أوجد نصف قطر تقارب المتسلسلات التالية:

(11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}x^n$ (12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1^2.3^2.5^2...(2n-1)^2}{2^2.4^2.6^2...(2n)^2}x^{2n}$

(13 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1.3.5...(2n-3)}{2^n n!}$ (14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1.3.5...(2n-1)^2}{2^n[1.4.7...(3n-2)]}$

أوجد $f'(x)$ و $\int\limits_0^x f(x)\,dx$ حيث أن:

(15 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5}{n}x^{n^2}$ (16 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}x^{n+1}$

(17 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\ f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ (18 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

8.6 متسلسلتا تيلور وماكلورين

إذا كان للدالة f مشتقات متصلة من الرتبة n في الفترة التي تحتوي على a، فإنه يمكن كتابة مفكوك $f(x)$ على الصورة التالية:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f'(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n \quad (1)$$

الصورة السابقة تعرف بمفكوك تيلور للدالة f حول $x = a$ و R_n يسمى الباقي (Remainder).

وفيما يلي سنقدم نظرية تيلور حيث يكون الباقي R_n على الصورة التفاضلية.

نظرية 27 نظرية تيلور (Taylor's Theorem)

إذا كانت الدوال $f, f', f'', ..., f^{(n)}, f^{(n+1)}$ كلها متصلة في الفترة التي تحتوي على a و x، فإنه يوجد عدد c بين a و x حيث أن:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (1)$$

والباقي يعطى على الصورة التالية:

$$R_n = \frac{f^{)n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \quad (2)$$

البرهان

يمكن استخدام الصيغة (1) ووضع $x = b$

$$f(b) = f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + ...$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{2!}(b-a)^{n+1} + R_n(a,b)$$

ولإيجاد $R_n(a,b)$، نعرف الدالة $\phi(x)$ كما يأتي:

$$\phi(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \frac{f^{(3)}(x)}{3!}(b-x)^3$$

$$-\ldots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(b-x)^n - R_n(a,b)\frac{(b-a)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}}$$

لاحظ أن $\phi(a) = \phi(b) = 0$

وبتفاضل الدالة $\phi(x)$ نجد أن:

$$\phi'(x) = -f'(x) + f'(x) - f''(x)(b-x) + 2\frac{f''(x)}{2!}(b-x) - \frac{f^{(3)}}{2!}(b-x)^2$$

$$+3\frac{f^{(3)}(x)}{3!}(b-x)^3 - \ldots \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + \frac{n+1}{(b-a)^{n+1}}R_n(a,b)(b-x)^n$$

ولحسن الحظ أن كل الحدود تلغي بعضها البعض ما عدا الحدين الأخيرين وبذلك:

$$\phi'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + R_n(a,b)(n+1)\frac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}}$$

وبتطبيق نظرية رول (راجع الجزء الأول) يوجد عدد C بين a و b حيث أن $\phi'(c) = 0$ وبذلك:

$$0 = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n + R_n(a,b)(n+1)\frac{(b-C)^n}{(b-a)^{n+1}}$$

وهكذا

$$R_n(a,b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

ويمكن الحصول على النتيجة المطلوبة بوضع $x = b$

ملاحظات

1) الباقي R_n يعتمد على a و b وبصفة عامة $R_n = R_n(a,b)$

2) إذا كانت $n = 0$ نحصل على $f(b) = f(a) + f'(c)(b-a)$ وهي نظرية القيمة المتوسطة.

3) R_n تعتبر قياساً لمقدار الفرق بين الدالة f ومتعددة الحدود المناظرة من الدرجة n.

وإذا كانت R_n صغيرة، فإنه يمكن استخدام متعددة الحدود لإيجاد القيمة التقريبية للدالة.

4) عند استخدام نظرية تيلور لإيجاد القيمة التقريبية لدالة معينة، الخطا ينتج من مصدرين:

أ) الخطأ R_n الناتج من إهمال قوى $(b-a)$ التي أعلى من n

ب) الخطأ الناتج عن كتابة كل حد على صورة كسر عشري.

الباقي (R_n) يكون عادة قريباً جداً من الحد المحذوف في المتسلسلة ويمكن استخدام هذه الحقيقة في تحديد عدد الحدود.

ويمكن البرهان على وجود عددين m و M حيث أن:

$m \leq f^{(n+1)}(x) \leq M$ لكل x بين a و b.

وبذلك يمكن الحصول على المتباينة التالية:

$$\frac{m(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq R_n(a,b) \leq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

الباقي $R_n(a,b)$ في نظرية تيلور يأخذ صوراً عديدة والنظرية التالية تعطى الباقي على صورة تكامل.

نظرية 28 (نظرية تيلور) الباقي في صورة تكامل

إذا كانت الدوال $f^{(n+1)}, f^{(n)}, ..., f'', f', f$ كلها متصلة في الفترة التي تشتمل على a و x فإن $f(x)$ تكتب على الصورة التالية:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ...$$

$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x,a)$$

حيث أن $$R_n = \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

البرهان

يبدأ البرهان بالصورة التالية:

$$\int_0^x f'(t)dt = f(t)\Big|_a^b = f(b) - f(a) \qquad (1)$$

والصورة السابقة يمكن كتابتها كما يأتي:

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt \qquad (2)$$

والآن يمكننا تطبيق قانون التكامل بالتجزيء $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

حيث أن $u = f'(t)$ و $v = t - b$

ومن (2) نجد أن:

$$f(b) = f(a) + (t-b)f'(t)\Big|_a^b - \int_a^b (t-b)f''(t)\,dt$$

$$= f(a) + (b-a)f'(a) + \int_a^b (b-t)f''(t)\,dt$$

ويمكن التكامل بالتجزيء مرة أخرى حيث أن $u = f''(t)$ و $v = -\frac{(b-t)^2}{2}$ وبذلك

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(t) - \frac{(b-t)^2}{2}f''(t)\Big|_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^2}{2} f'''(t)\,dt$$

$$= f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^2}{2!} f^{(3)}(t)\,dt$$

وبالاستمرار في إجراء عملية التكامل الجزئي نحصل على الصورة التالية:

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \dots$$

$$+ \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

وبوضع $b = x$ نحصل على النتيجة المطلوبة

متسلسلة ماكلورين (Maclaurin Series)

تعتبر متسلسلة ماكلورين حالة خاصة من متسلسلة تيلور، عندما $a = 0$ نحصل على الصورة التالية:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

وفيما يلي نقدم بعض الأمثلة المحلولة:

مثال 1

أوجد القيمة التقريبية للمقدار $(1.01)^{\frac{1}{5}}$ إلى 4 أرقام عشرية صحيحة.

الحــل

نفرض أن $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{5}}$، $a = 0$ و $b = 0.01$ وبالتعويض في متسلسلة تيلور حول $a = 0$.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{2!} + f^{(4)}(0)\frac{x^4}{4!} + ...$$

و $$f'(x) = \frac{1}{5}(1+x)^{-\frac{4}{5}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{5}\ ,\ f(a) = f(0) = 1$$

و $$f''(x) = -\frac{4}{25}(1+x)^{-\frac{9}{5}} \Rightarrow f''(0) = -\frac{4}{25}$$

و $$f'''(x) = \frac{36}{125}(1+5)^{-\frac{14}{5}} \Rightarrow f'''(0) = \frac{36}{125}$$

وبالتعويض في مفكوك تيلور للدالة $f(x)$ نجد أن:

$$f(b) = (1+b)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{5}(0.01) - \frac{4}{25}\left(\frac{1}{2}\right)(0.01)^2 + \left(\frac{36}{125}\right)\left(\frac{1}{6}\right)(0.01)^3$$

$$= 1 + 0.002 - 0.000008 - ... \cong 1.002$$

ويعتبر الحد الثالث 0.000008− قيمة تقريبية للباقي R_2

مثــال 2

أوجد $\sqrt[3]{7}$ إلى أربعة أرقام عشرية صحيحة.

الحــل

نفرض أن $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ و $a = 8$ و $b = 7$

وهكذا $$f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}\ ,\ f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}\ ,\ f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

و $f^{(5)}(x)=\frac{880}{243}x^{-\frac{14}{3}}\ ,\ f^{(4)}(x)=-\frac{80}{81}+x^{-\frac{11}{3}}$

وكما في المثال السابق يمكن كتابة مفكوك الدالة $f(x)$ كما يأتي:

$$f(x)=x^{\frac{1}{3}}=f(8)+f'(8)(x-a)+\frac{f''(8)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(8)}{3!}(x-a)^3$$

$$+\frac{f^{(4)}(8)}{4!}(x-a)^4+\frac{f^{(5)}(8)}{5!}(x-a)^5+...$$

وبوضع $x=b=7$ و $a=8$ نجد أن:

$$f(7)=7^{\frac{1}{3}}=2-\frac{1}{12}-\frac{1}{288}-\frac{5}{20736}-\frac{80}{81(2^{11})(4.3.2.1)}$$

$$=2-0.083333-0.003472-0.000241-0.00002$$

$$=1.912934$$

أي أن $\sqrt[3]{7}=1.9129$

مثـال 3

أوجد مفكوك تيلور للدالة $ln(1+x)$ إلى الدرجة الثالثة وأوجد القيمة التقريبية للباقي R_n في الفترة $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

الحـل

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+...$$

وبتكامل الطرفين من 0 إلى x.

$$ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+R_3$$

ويترك للقارئ أن يبين

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$$

وبذلك

$$R_3 = -\int_0^x \frac{1}{(1+t)^4}(x-t)^3 dt$$

ويمكن التعويض عن $(1+t)^{-4}$ بـ 1

وهكذا

$$|R_3| < \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - t\right)^3 dt = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - t\right)^4 \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{64}$$

مثال 4

أوجد متسلسلة تيلور للدالة e^x حول $a = 0$

الحل

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x$$

وهذا يتضمن $f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1$

وهكذا

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

مثال 5

أوجد مفكوك تيلور للدالة $sinh\ x$ حول $x = 0$

الحل

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + ..$$

وبالتعويض عن x بـ $-x$

$$\bar{e}^x = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + ...$$

وهكذا

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

مثال 6

أوجد مفكوك تيلور للدالة $\cosh x$ حول $x = 0$

الحل

لاحظ أن $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$

وهكذا

$$\cosh x = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

تمارين 8.6

أوجد متسلسلة ماكلورين واذكر فترة التقارب في الحالات الآتية:

1) $f(x) = cos\ x$ 2) $f(x) = x^2 e^x$ 3) $f(x) = cos^2 x$

4) $f(x) = cos^2\ x$ 5) $f(x) = 2^{e^{x^2}}$ 6) $f(x) = tan^{-1} x$

أوجد القيمة التقريبية لكل من الأعداد التالية إلى أربعة أرقام عشرية صحيحة.

7) $e^{-0.2}$ 8) $e^{-0.4}$ 9) $sin\ (0.5)$

10) $cos(0.5)$ 11) $(1.08)^{\frac{1}{4}}$ 12) $(30)^{\frac{1}{5}}$

13) $(65)^{\frac{1}{6}}$ 14) e 15) $sin\ (1)$

16) $ln\ 1.5$ 17) $\int_0^{0.5} cos\ x^2$ 18) $\int_0^{0.5} cos\sqrt{x}\ dx$

19) أوجد متسلسلة ماكلورين للدالة f حيث أن:

$$f(x) = ln\frac{1+x}{1-x}$$

أوجد متسلسلة تيلور حول $x = a$ للدوال التالية

20) $f(x) = x\ ln(1+x^2)$ حول $a = 0$

21) $f(x) = 2^x$ حول $a = 0$

22) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{sin\ x}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 1 & ; \quad x = 0 \end{cases}$ حول $a = 0$

9.6 متسلسلة ذات الحدين (the Binomial Series)

هي عبارة عن متسلسلة ماكلورين للدالة $f(x) = (1+x)^m$

وتستخدم لإيجاد قيمة تقريبية دقيقة للجذور، واستخدمها نيوتن في إيجاد القيم التقريبية للتكامل.

وللحصول على الصورة العامة للمتسلسلة نكتب الدالة ومشتقاتها:

$$f(x) = (1+x)^m$$

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}$$

$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}$$

$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)...(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

وبالتعويض في متسلسلة ماكلورين

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{n!}x^n + ...$$

نحصل على الصورة التالية:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n+1)}{n!}x^n + ... \qquad (1)$$

ويمكن أن تكتب على الصورة التالية:

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n \qquad (2)$$

حيث أن $|x| < 1$.

ويمكن برهان تقارب المتسلسلة بتطبيق اختبار المقارنة:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{m(m-1)...(m-n+1)(m-n)x^{(n+1)}}{(n_1)!} \cdot \frac{n!}{m(m-1)...(m-n+1)x^n}\right|$$

$$= \frac{|m-n|}{n+1}|x| = \frac{\left|\frac{m}{n}-1\right|}{1+\frac{1}{n}}|x|$$

وهكذا $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x|$

أي أن المتسلسلة متقاربة إذا كان $|x| < 1$

ملاحظة

إذا كانت m عدداً صحيحاً، المتسلسلة نهائية لأن الحدود التي بعد $m+1$ كلها أصفار وإذا كانت m عدداً غير صحيح، فإن المتسلسلة لانهائية.

مثال 1

أكتب متسلسلة ذات الحدين للدالة $(1+x)^{\frac{5}{3}}$

الحل

بالتعويض في (1) نجد أن:

$$(1+x)^{\frac{5}{3}} = 1 + \frac{5}{3}x + \frac{\frac{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)}{2}x^2 + \frac{\frac{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)}{6}x^3 + \frac{\frac{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)}{4!}x^4 + ...$$

$$= 1 + \frac{5}{3}x + \frac{5}{9}x^2 - \frac{5}{81}x^3 + \frac{5}{243}x^4 + ...$$

مثـــال 2

أكتب متسلسلة ذات الحدين للدالة $(1+x)^7$

الحـــل

$$(1+x)^7 = 1 + 7x + \frac{(7)(6)}{2!}x^2 + \frac{(7)(6)(5)}{3!}x^3 + ... + \frac{7!}{7!}x^7$$

$$= 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + ... + x^7$$

لاحظ أن المتسلسلة نهائية.

مثـــال 3

أوجد القيمة التقريبية للمقدار $\sqrt{1.12}$

الحـــل

$$\left(1+\frac{3}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{25}\right) + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}\left(\frac{3}{25}\right)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}\left(\frac{3}{25}\right)^3 + ...$$

$$= 1 + \frac{3}{50} - \frac{9}{5000} + \frac{27}{250000} - ...$$

$$= 1 + 0.06 - 0.0018 + 0.000108 - ...$$

وهكذا

$$\sqrt{1.12} \approx 1.058308$$

ويمكن الحصول على دقة أكثر بجمع عدد أكبر من الحدود في المتسلسلة ويترك تحديد الخطأ كتمرين للقارئ.

مثـــال 4

أكتب متسلسلة ذات الحدين التي تمثل الدالة $\sqrt[3]{1+x^4}$ حيث أن $|x|<1$

الحـــل

$$\sqrt[3]{1+x^4} = 1+\frac{1}{3}x^4+\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2!}\right)(x^4)^2+...$$

$$=1+\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{9}x^8+...$$

مثـــال 5

أوجد القيمة التقريبية للتكامل النهائي

$$\int_0^{0.2}\sqrt[3]{1+x^4}\,dx$$

الحـــل

من المثال السابق

$$\int_0^{0.2}\sqrt[3]{1+x^4}\,dx \approx \int_0^{0.2}\left(1+\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{9}x^8+...\right)dx$$

$$\approx \left(x+\frac{1}{15}x^5-\frac{1}{81}x^9+...\right)\Big|_0^{0.2}$$

$$=0.2+0.0000213$$

$$\approx 0.2.0000213$$

حيث أن الخطأ أقل من $\frac{1}{81}(0.2)^9$ وهو مقدار صغير جداً.

تمارين 9.6

أكتب الحدود الخمسة الأولى من متسلسلة ذات الحدين التي تمثل الدوال التالية:

1) $(1+x)^{-\frac{7}{3}}$ 2) $(1+x^2)^{-\frac{2}{3}}$ 3) $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

4) $(1+x^3)^7$ 5) $(5+x)^{\frac{1}{2}}$ 6) $(3+\sqrt{x})^{-3}$

أوجد الأعداد التالية إلى خمسة أرقام عشرية صحيحة.

7) $\int_0^x sin(x^2)\,dx$ 8) $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

9) $\int_0^{0.5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ 10) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

تمارين الفصل السادس

1) ناقش المتسلسلات التي حدها العام $(n+h\ term)$ كما يلي:

أ) $a_n = 1 + (0.8)^n$　　ب) $a_n = \dfrac{n + \ln n}{n}$

جـ) $a_n = \left(\dfrac{n-5}{n}\right)^n$　　د) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{3^n}{n}}$

هـ) $a_n = \dfrac{(-4)^n}{n!}$　　و) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n}$

2) أوجد مجموع المتسلسلات التالية:

أ) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-3)(2n-1)}$　　ب) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{-2}{n(n+1)}$

جـ) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{-8}{(4n-3)(4n+1)}$　　د) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n}$

3) بيّن أي المتسلسلات التالية متقاربة مطلقاً، متقاربة شرطاً أو متباعدة. وضّح إجابتك.

أ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$　　ب) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^3}$

جـ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$　　د) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-3)^n}{n!}$

هـ) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$　　و) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n 3^n}{n^n}$

4) أوجد نصف قطر فترة التقارب وأوجد قيمة x التي تجعل المتسلسلة متقاربة بصورة مطلقة وبصورة شرطية لمتسلسلات القوى التالية:

أ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n-2}}{(2n-1)!}$ ب) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(2n+1)^n}{(2n+1)2^n}$

جـ) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ د) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (coth\ n)x^n$

3) كل من المتسلسلات التالية تكون قيمة متسلسلة ماكلورين (Maclaurin Series) للدالة $f(x)$ عند نقطة معينة، ما هي الدالة وما هي النقطة وأوجد مجموع المتسلسلة لكل من:

أ) $-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{4^n}+\ldots$

ب) $\frac{2}{3}-\frac{4}{18}+\frac{8}{81}-\ldots(-1)^{n-1}\frac{2^n}{n3^n}+\ldots$

جـ) $1+ln\ 2+\frac{(ln\ 2)^2}{2!}+\ldots+\frac{(ln\ 2)^n}{n!}+\ldots$

د) $\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{9\sqrt{3}}+\frac{1}{45\sqrt{3}}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)(\sqrt{3})^{2n-1}}$

6) أوجد الحدود الأربعة الأولى غير الصفرية لمتسلسلة تيلور للدالة f عند $x=a$ في الحالات التالية:

أ) $f(x)=\sqrt{5+x^2} \quad ; \quad x=-1$

ب) $f(x)=\frac{1}{1-x} \quad ; \quad x=2$

جـ) $f(x)=e^{-x^2} \quad ; \quad x=0$

7) استخدم متسلسلات القوى لحل مسائل القيمة الابتدائية التالية:

أ) $y' + y = 2x$ حيث أن $y(0) = 0$

ب) $y' - y = 4x$ حيث أن $y(0) = -1$

جـ) $y' - y = 0$ حيث أن $y(0) = -3$

8) استخدم متسلسلة ملائمة لإيجاد القيمة التقريبية للتكاملات التالية:

أ) $\int_0^{1/2} e^{-x^3} dx$ ب) $\int_0^1 x sin(x^3) dx$

جـ) $\int_0^{1/64} \frac{tan^{-1}x}{\sqrt{x}} dx$ د) $\int_0^{1/2} \frac{tan^{-1}2x}{2x} dx$

9) استخدم متسلسلة القوى لإيجاد النهايات التالية:

أ) $\lim_{x \to 0} \frac{7 sin\ x}{e^{2x} - 1}$ ب) $\lim_{y \to 0} \frac{y^2}{cos\ y - coshy}$

جـ) $\lim_{z \to 0} \frac{1 - cos^2 z}{ln(1 - z) + sin\ z}$ د) $\lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{2 - 2cost} - \frac{1}{t^2} \right)$

10) برهن أن المتسلسلتين التاليتين متقاربتان:

أ) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(sin \frac{1}{2n} - sin \frac{1}{2n+1} \right)$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(tan \frac{1}{2n} - tan \frac{1}{2n+1} \right)$

11) أوجد فترة تقارب المتسلسلة

$$y = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{180}x^6 + ... + \frac{1.4.7. \ ... \ .(3n-2)}{(3n)!}x^{3n} + ...$$

12) ناقش تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية:

أ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)^{n+(1/2)}}$ ب) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tan^{-1}n)^2}{1+n^2}$

جـ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{log_n(n!)}{n^3}$ د) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n tanhn$

13) أوجد $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{n+1} \frac{1}{1+x^2} dx$

14) أوجد قيم x التي تجعل المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n+1)(2x+1)^n}$$

متقاربة بصورة مطلقة.

15) أوجد متسلسلة تيلور للدوال التالية حول النقطة الموضحة في كل حالة

أ) $cos\ x\ ;\ x=1$ ب) $tan^{-1}x\ ;\ x=2$

جـ) $e^{-x^2}\ ;\ x=0$ د) $ln\ x\ ;\ x=1.3$

16) أوجد قيمة b التي تجعل نصف قطر فترة التقارب للمتسلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^n x^n}{ln\ n}$ يساوي 5.

الفصل السابع

بعض عناصر المعادلات التفاضلية العادية

7 . 1 تعريفات ونظرية الوجود

المعادلة التفاضلية العادية عبارة عن علاقة بين المتغير x ودالة غير محددة $y(x)$ ومشتقاتها إلى الرتبة n. وتكتب المعادلة التفاضلية العادية على الصورة التالية:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

وحل المعادلة التفاضلية العادية هو عبارة عن تعميم لحل المعادلة الجبرية:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

حل المعادلة الجبرية كما نعرف أعداد ولكن حل المعادلة التفاضلية دوال، نظرية الوجود تضمن وجود الحل ولكن إيجاد صورة صريحة لكل الحلول ليس بالأمر السهل في كثير من المسائل. ولحسن الحظ يمكن تحديد خواص الحلول من المعادلة التفاضلية بدون صور صريحة للحلول ويمكن الحصول على قيم عددية للحلول حسب الدقة المطلوبة. ومن أشهر الطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية:

1) طرق الفرق النهائي 2) طرق العنصر النهائي 3) طرق العنصر الشامل

وتعتبر المعادلة التفاضلية صيغة صريحة تصف مجموعة من الدوال وهذا ما جعل معظم قوانين الطبيعة تذكر في صورة معادلات تفاضلية وكمثال على ذلك قانون نيوتن الثاني: (القوة = الكتلة × العجلة)

وهذه المعادلة تناظر المعادلة التفاضلية

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

حيث أن m عبارة عن الكتلة و $\frac{d^2x}{dt^2}$ العجلة و F القوة.

وحل المعادلة التفاضلية

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

هو عبارة عن دالة $y = f(x)$ معرفة في الفترة $a < x < b$ ويمكن أن تكون لانهائية، ولها مشتقات إلى الرتبة n في الفترة المذكورة. وكمثال $y = e^x$ يعتبر حلاً للمعادلة التفاضلية:

$$y'' - y = 0$$

وفي معظم المعادلات التفاضلية يمكن التعبير عن الحلول في صورة واحدة

$$y = f(x, c_1, ..., c_2)$$

حيث أن $c_n, ..., c_3, c_2, c_1$ ثوابت اختيارية.

الصورة السابقة تسمى الحل العام، وكمثال على ذلك الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' - y = 0$ يكتب على الصورة التالية:

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$$

مثال 1

أذكر رتبة ودرجة كل من المعادلات التفاضلية التالية:

1) $xy'' + 2y' + 3y - 6e^x = 0$ 2) $(y''')^2 - 2y'y''' + (y'')^3 = 0$

3) $sin(y'') + e^{y'} = 1$ 4) $(y')^2 + xy' - y^2 = 0$

الحـــل

الرتب: 2، 3، 2، 1

الدرجات: 1، 2، غير معرفة، 2

> **ملاحظة**
>
> المعادلتان (2) و (4) مربعتان في أعلى مشتقة ولهذا كانت درجة كل منهما 2.

بصفة عامة: إذا كانت قوة أكبر مشتقة في المعادلة التفاضلية تساوي k، فإنها تسمى معادلة تفاضلية من الدرجة k.

وتكون المعادلة التفاضلية خطية إذا كانت على الصورة التالية:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y' + a_n(x)y = Q(x)$$

أي أن المعادلة خطية في y ومشتقاتها.

مثـــال 2

بيّن أن المعادلة التفاضلية التالية خطية: $xy'' + 2y' + 3y - 6e^x = 0$

الحـــل

بما أن المعادلة خطية في y ومشتقاتها، إذن المعادلة خطية.

المعادلة التفاضلية الخطية تكون دائماً من الدرجة الأولى والعكس غير صحيح، وكمثال على ذلك:

$$y' = 1 + xy^2$$

درجتها 1 ولكنها غير خطية.

وتوجد بعض الطرق الأولية لإيجاد حلول المعادلات التفاضلية منها الحل عن طريق الرسم والتكامل خطوة بخطوة ولا مجال لذكرها في هذا الفصل المختصر.

وفيما يلي نقدم نظرية الوجود.

نظرية الوجود (Existence Theorem)

إذا كانت $F(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ دالة في المتغيرات $x, y, y', ..., y^{(n-1)}$ معرّفة ومتصلة عندما: $|x - x_0| < h, |y - y_0| < h, ..., \left|y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}\right) < h$ ولها مشتقات جزئية متصلة بالنسبة للمتغيرات $y, y', ..., y^{(n-1)}$

فإنه يوجد حل $(y = f(x))$ للمعادلة التفاضلية:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

المعرفة في الفترة $|x - x_0| < h_1$

وتحقق الشروط الابتدائية التالية:

عندما $x = x_0$، فإن $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}, ..., y' = y'_0$، $y = y_0$

حيث أن $y_0^{(n-1)}, ..., y_0, x_0$ قيم معطاة.

وعلاوة على ذلك الحل وحيد.

أي أنه إذا كان $y = g(x)$ حلاً آخر للمعادلة التفاضلية ويحقق الشروط الابتدائية فإن $f(x) \equiv g(x)$ عندما تكون الدالتان معرفتين.

مثال 3

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية: $y'' = cos\ x$

الحل

نستطيع الحصول على الحل العام بتكامل الطرفين مرتين متاليتين:

$$\begin{aligned} y' &= \int sin\ x\ dx \\ &= -cos\ x + c_1 \end{aligned}$$

وبإجراء عملية التكامل مرة أخرى

$$\begin{aligned} y &= -\int cos\ x\ dx + c_1 \int dx \\ &= -sin\ x + c_1 x + c_2 \end{aligned}$$

مثال 4

أوجد الحل الخاص للمعادلة التالية: $y'' = e^x$

حيث أن $y = 1$ ، $y' = 0$ عندما $x = 1$.

الحل

بعد إجراء التكامل نجد أن: $y' = e^x + c$

ولكن $y' = 0$ عندما $x = 1$

$$0 = 2 + c_1 \Rightarrow c_1 = -e$$

أي أن $y' = e^x - e$

وبإجراء عملية التكامل مرة أخرى نجد أن: $y = e^x - xe + c_2$

كذلك $y=1$ عندما $x=1$، $1=e-e+c_2$

وهذا يتضمن $c_2=1$

وهكذا الحل الخاص يكتب على الصورة التالية:

$$y=e^x-x\,e+1$$

تمارين 1.7

بيّن أن الحلول التالية تحقق المعادلات التفاضلية المعطاة في كل حالة:

1) $y=\cos x$ حيث أن $y''+y=0$ 2) $y=e^{2x}$ حيث أن $y'''-4y'=0$

3) $y=c_1e^{2x}+c_2^{-2x}$ حيث أن $y''-4y=0$

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

4) $y'''=x$ 5) $y^{(n)}=1$ 6) $y^{(n)}=0$

7) $x^2y'+2xy=e^x$ 8) $x^2y''+4xy'+2y=e^x$

9) $2xyy'+y^2=3x^2$

10) بيّن أن $y=\frac{1}{2}(x^2+x)+1$ تحقّق المعادلة التفاضلية الحدية التالية:

$y''=1$ حيث أن $y=1$ عندما $x=0$ و $y=2$ عندما $x=1$

11) حدد حسب نظرية الوجود النقاط التي يكون خلالها الحل وحيداً أو مفرداً في المعادلات التفاضلية التالية:

أ) $y'=x\,ln\,x$ ب) $y'=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

2.7 المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الأولى، والدرجة الأولى تكتب على الصورة التالية:

$$Q(x,y)y' + P(x,y) = 0 \qquad (1)$$

حيث أن $Q(x,y) \neq 0$

وبضرب طرفي المعادلة (1) في $d\,x$، يمكن كتابة المعادلة (1) كما يأتي:

$$Q(x,y)dy + P(x,y)dx = 0 \qquad (2)$$

الطرق المتبعة للحل

توجد عدة طرق لحل المعادلة (2) واختيار الطريقة المناسبة يأتي بعد دراسة المعادلة التفاضلية وتحديد نوعها ومن أهم الطرق:

1 ـ فصل المتغيرات (Separation of Variables)

إذا أمكن كتابة المعادلة التفاضلية بعد ضربها في عامل مناسب على الصورة التالية:

$$f(x)\ dx + g(y)\ dy = 0$$

فإن المتغيرات قابلة للفصل ويمكن إيجاد الحل بتكامل الطرفين:

$$\int f(x)\ dx + \int g(x)\ dy = c$$

والمعادلة التفاضية: $y' = F(x,y)$

تكون متغيراتها قابلة للفصل إذا أمكن كتابة الدالة $F(x,y)$ كما يلي:

$$F(x,y) = G(x)\ H(y)$$

مثـــال 1

أوجد حل المعادلة التالية $yy' = xe^{y^2}$

الحـــل

يمكن كتابة المعادلة كما يأتي:

$$y\ dy = x\ e^{y^2}\ dx$$

وبالقسمة على e^{y^2} نجد أن:

$$e^{-y^2} y\ dy = x\ dx$$

وبتكامل طرفي المعادلة السابقة:

$$\int e^{-y^2} y\ dy = \int x\ dx + c$$

$$-\frac{1}{2} e^{-y^2} = \frac{1}{2} x^2 + c$$

الحل يكون:

$$x^2 + e^{-y^2} = c$$

مثـــال 2

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية: $y' = cos^2\ x\ cos\ y$

الحـــل

المعادلة قابلة لفصل المتغيرات (لماذا؟)

ويمكن كتابة المعادلة كما يأتي:

$$\frac{dy}{cos\ y} = cos^2 x\ dx \quad \text{أو} \quad sec\ y\ dy = cos^2 x\ dx$$

وبالتعويض عن cos^2x بـ $\frac{1}{2}(1+cos\ 2x)$ وتكامل الطرفين

$$\int sec\ y\ dy = \frac{1}{2}\int (1+cos\ 2x)dx$$

$$ln\ |sec\ y + tan\ y| = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}sin\ 2x\right)+c$$

ويمكن كتابة الحل العام كما يلي:

$$4ln\ |sec\ y + tan\ y| = 2x + sin\ 2x + c$$

2 ـ المعادلة التامة (The Exact Equation)

إذا كانت المعادلة التفاضلية

$$P(x,y)dx + Q(x,y)\ dy = 0$$

تامة، فإنه توجد دالة $u(x,y)$ حيث أن:

$$P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy = du$$

أي أن $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$ أو $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$

وبتفاضل المعادلة الأولى بالنسبة للمتغير x والثانية بالنسبة للمتغير y:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad و \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

ولكن $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ وهذا يتضمن

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

مثـال 3

أوجد حل المعادلة $(x\ y\ cos\ xy + sin\ xy)dx + (x^2\ cos\ xy + e^y)dy = 0$

الحـل

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x\ cos\ xy - x^2 y\ sin\ xy + x\ cos\ xy$$

$$= 2x\ cos\ xy - x^2 y\ sin\ xy \qquad (1)$$

كذلك

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\ cos\ xy - yx^2 sin\ xy \qquad (2)$$

من (1) و(2) نستنتج أن المعادلة التفاضلية تامة، وبالرجوع للمعادلة الأصلية

$$\frac{\partial u}{\partial x} = xy\ cos\ xy + sin\ xy = P(x,y)$$

و

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 cos\ xy + e^y = Q(x,y)$$

وبتكامل المعادلة الأخيرة بالنسبة للمتغير y:

$$u(x,y) = x\ sin\ xy + e^y + f(x)$$

وبتفاضل المعادلة الأخيرة بالنسبة للمتغير x نجد أن:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = sin\ xy + xy\ cos\ xy + f'(x)$$

ولكن $sin\ xy + xy\ cos\ xy + f'(y) = xy\ cos\ xy + sin\ xy$

وهذا يتضمن $f'(x) = 0$

أو $f(x) = c$

إذن الحل العام يكتب على الصورة التالية:

$$x\ sin\ xy + e^y = c$$

مثـــال 4

أوجد حل المعادلة $(2x^3 - xy^2 - 2y + 3)dx - (x^2y + 2x)dy = 0$

الحـــل

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2xy - 2 = \frac{\partial P}{\partial x}$$

أي أن المعادلة تامة.

وبما أن:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x^3 - xy^2 - 2y + 3 \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -x^2y - 2x$$

وبتكامل المعادلة الأخيرة بالنسبة للمتغير y

$$u(x,y) = -\frac{1}{2}x^2y^2 - 2xy + f(x)$$

وبتفاضل المعادلة الأخيرة بالنسبة للمتغير x

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -xy^2 - 2y + f'(x)$$

ولكن $-xy^2 - 2y + f'(x) = 2x^3 - xy^2 - 2y + 3$

وباختصار العوامل المتشابهة نجد أن: $f'(x) = 2x^3 + 3$

وهذا يتضمن $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 3x$

إذن الحل العام

$$x^4 - x^2y^2 - 4xy + 6x = c$$

مثـــال 5

أوجد حل المعادلة $[2xy\ cos(x^2) - 2xy + 1]dx + [sin(x^2) - x^2]dy = 0$

الحل

بما أن $$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x\ cos(x^2) - 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

إذن المعادلة تامة.

وبتكامل المعادلة $\frac{\partial u}{\partial y} = sin(x^2) - x^2$ بالنسبة للمتغير y نجد أن:

$$u(x,y) = y\ sin(x^2) - x^2y + f(x)$$

وبتفاضل المعادلة الأخيرة بالنسبة للمتغير x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy\ cos(x^2) - 2xy + f'(x)$$

ولكن $$2xy\ cos(x^2) - 2xy + f'(x) = 2xy\ cos(x^2) - 2xy + 1$$

أي أن $$f'(x) = 1$$

وهذا يتضمن أن $$f(x) = x$$

وهكذا الحل العام يكتب على الصورة التالية:

$$y\ sin(x^2) - x^2y + x = c$$

3 ـ المعادلة المتجانسة (Homogeneous Equation)

إذا كانت المعادلة التفاضلية على الصورة التالية:

$$y' = F(x,y)$$

وإذا أمكن التعبير عن الدالة $F(x,y)$ بمتغير واحد $v = \frac{y}{x}$ فإن المعادلة التفاضلية متجانسة.

المعادلة التفاضلية المتجانسة يمكن اختزالها إلى الصورة التامة كما يتضح من الأمثلة التالية:

مثـال 6

أوجد حل المعادلة التالية:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

الحـل

الدالة $F(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$ يمكن أن تكتب كما يأتي:

$$F(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

وبوضع $v = \dfrac{y}{x}$ نستنتج أن المعادلة التفاضلية متجانسة.

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية الاصلية نجد أن:

$$dy = \left(\frac{1}{v} + v\right) dx \qquad (*)$$

ولكن $y = x\,v$

وبتفاضل الطرفين $dy = x\,dv + v\,dx$

وبالتعويض في $(*)$ عن dy نحصل على العلاقة التالية:

$$x\,dv + v\,dx = \left(\frac{1}{v} + v\right) dx$$

أو

$$x\,dv = \frac{1}{v}\,dx$$

وبضرب الطرفين في $\frac{v}{x}$ نجد أن:

$$v\,dv = \frac{dx}{x}$$

وبتكامل الطرفين.

$$\frac{1}{2}v^2 = ln\ x + c$$

المعادلة السابقة يمكن كتابتها كما يلي:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = ln\ x + c$$

أو

$$y^2 = 2x^2 ln\ x + 2x^2 c$$

والمعادلة الأخيرة تمثل الحل العام

ملاحظة

الدالة $P(x,y)$ متجانسة من الدرجة n إذا كان:

$$P(tx,ty) = t^n P(x,y)$$

وإذا كانت الدالتان $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ متجانستين ومن الدرجة نفسها، فإن المعادلة التفاضلية:

$$P(x,y)\ dx + Q(x,y)dy = 0$$

تكون متجانسة.

مثـــال 7

بيّن أن المعادلة التالية متجانسة وأوجد الحل العام

$$(3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 3xy^2)\ dy = 0$$

الحـل

$$P(tx,ty)=3t^3x^2y+t^3y^3=t^3P(x,y)$$

و

$$Q(tx,ty)=t^3x^3+3t^3xy^2=t^3Q(x,y)$$

إذن المعادلة التفاضلية متجانسة.

وبضرب طرفي المعادلة في $\frac{1}{x^3}$ نحصل على الصورة التالية:

$$\left(3\frac{y}{x}+\frac{y^3}{x^3}\right)dx+\left(1+3\frac{y^2}{x^2}\right)dy=0 \qquad (*)$$

وبفرض $v=\frac{y}{x}$، فإن:

$$dy=xdv+vdx$$

وبالتعويض في المعادلة (*) نجد أن:

$$(3v+v^3)dx+(1+3v^2)(xdv+vdx)=0$$

أو

$$(4v+4v^3)dx+(1+3v^2)xdv=0$$

وبالقسمة على العامل $x(4v+4v^3)$ نحصل على العلاقة التالية:

$$\frac{dx}{x}+\frac{1+3v^2}{4v+4v^3}dv$$

وبتكامل الطرفين نجد أن:

$$ln|x|+\frac{1}{4}ln|v+v^3|=c$$

أو

$$ln\left(\frac{y}{x}+\frac{y^3}{x^3}\right)^{\frac{1}{4}}x=c$$

وهذا يتضمن

$$\left(\frac{y}{x}+\frac{y^3}{x^3}\right)^{\frac{1}{4}} x = \hat{c}$$

أو

$$\left(\frac{y}{x}+\frac{y^3}{x^3}\right) x^4 = C$$

وبذلك يمكن كتابة الحل العام على الصورة التالية:

$$yx^3 + y^3x = c$$

ملاحظة

المعادلة التفاضلية الأصلية تامة ويمكن إيجاد الحل بالطريقة نفسها التي أتبعت في حل المعادلة التفاضلية التامة.

4) العوامل التكاملية (Integrating Factors)

إذا كانت المعادلة التفاضلية

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

غير تامة، فإنه يمكن جعلها تامة بضربها في دالة مناسبة، وتكون هذه الدالة عادة في المتغيرين x وy على الأكثر.

ولتحديد بعض الصور القياسية للعوامل التكاملية، نفرض أن الدالة μ عامل تكاملي للمعادلة (1).

وهكذا فإن المعادلة

$$\mu P(x,y)dx + \mu Q(x,y)dy = 0$$

تامة وبذلك

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$$

وبأخذ المشتقات الجزئية (راجع الفصل الأول).

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y}+P\frac{\partial \mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{\partial \mu}{\partial x}$$

ويمكن كتابة المعادلة السابقة كما يأتي:

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=Q\frac{\partial \mu}{\partial x}-P\frac{\partial \mu}{\partial y} \qquad (2)$$

والآن يعتمد حل المعادلة (2) على الدالة μ

أ) إذا كانت μ دالة في x فقط، فإن المعادلة (2) تختزل إلى الصورة التالية:

$$\mu\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=Q\frac{d\mu}{dx}$$

أو

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx=\frac{d\mu}{\mu}$$

وإذا كان $\left(\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right)$ دالة في x فقط فإن:

$$f(x)dx=\frac{d\mu}{\mu}$$

وبتكامل المعادلة الأخيرة نجد أن:

$$ln\mu=\int f(x)dx$$

وهذا يتضمن أن العامل التكاملي يكتب كما يأتي:

$$\boxed{\mu=e^{\int f(x)dx}}$$

وبالطريقة نفسها إذا كانت μ دالة في y فقط، فإن العامل التكاملي يكتب كما يأتي:

$$\mu = exp(- \int g(y)dy$$

حيث أن:

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -g(y)$$

وإذا كانت المعادلة التفاضلية خطية ومن الرتبة الأولى:

$$y' + P(x)y = q(x)$$

فإن العامل التكاملي يأخذ الصورة التالية:

$$\mu = exp(\int P(x)dx)$$

ملاحظة

$$exp(x) = e^x$$

البرهان

المعادلة الخطية $y' + P(x)y = q(x)$ يمكن أن تكتب كما يلي:

$$(P(x)y - q(x))dx + dy = 0$$

وبذلك $\hat{P} = P(x)y - q(x)$

$$Q = 1$$

وهكذا $\frac{\partial \hat{P}}{\partial y} = P(x)$ و $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$

أي أن:

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial \hat{P}}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = P(x)$$

دالة في x فقط وهذا يتضمن النتيجة المطلوبة.

مثـال 8

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$(xy + y - 1)dx + xdy = 0$$

الحـل

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \;\text{،}\; \frac{\partial P}{\partial y} = x + 1$$

وبذلك

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = 1$$

إذن العامل التكاملي:

$$\mu = exp(\int dx) = e^x$$

وبضرب طرفي المعادلة الأصلية في العامل التكاملي نجد أن:

$$e^x(xy + y - 1)dx + xe^x dy = 0$$

والمعادلة الأخيرة تامة ويترك تحقيق ذلك للقارىء.

وبما أن $\frac{\partial u}{\partial x} = xye^x + ye^x - e^x$ و $\frac{\partial u}{\partial y} = xe^x$، وبتكامل المعادلة الأخيرة بالنسبة للمتغير y نحصل على:

$$u(x, y) = xye^x + f(x)$$

ولكن

$$u_x = ye^x + xye^x + \dot{f}(x) = xye^x + ye^x - e^x$$

ومنها $\dot{f}(x) = -e^x$ وهذا يتضمن $f(x) = -e^x$

إذن الحل العام يكتب على الصورة التالية:

$$u(x, y) = xye^x - e^x = c$$

مثـــال 9

أوجد حل المعادلة $2(2y^2+5xy-2y+4)dx+x(2x+2y-1)dy=0$

الحـــل

واضح أن: $\frac{\partial P}{\partial y}=2(4y+5x-2)$ و $\frac{\partial Q}{\partial x}=4x+2y-1$

وبذلك

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=6y+6x-3=3(2y+2x-1)$$

وبما أن

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=-\frac{3}{x}$$

وهذا يتضمن أن العامل التكاملي:

$$\mu=exp(\int\tfrac{3}{x}dx)=e^{3lnx}=x^3$$

وبضرب طرفي المعادلة في العامل التكاملي x^3:

$$(4x^3y^2+10x^4y-4x^3y+4x^3)dx+(2x^5+2x^4y-x^4)dy=0$$

حيث أن

$$\frac{\partial u}{\partial x}=4x^3y^2+10x^4y-4x^3y+4x^3 \qquad (1)$$

و

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2x^5+2x^4y-x^4$$

وبتكامل المعادلة الأخيرة بالنسبة للمتغير y

$$u(x,y)=2x^5y+x^4y^2-x^4y+f(x) \qquad (2)$$

وبتفاضل المعادلة السابقة بالنسبة للمتغير x نجد أن

$$u_x = 10x^4y + 4x^3y^2 + 4x^3y + f'(x) \quad (3)$$

ومن المعادلتين (1) و (3) نجد أن: $f'(x) = 8x^3$

أي أن: $f(x) = 2x^4$

وبالتعويض عن $f(x)$ في المعادلة (2) نحصل على الحل العام:

$$u(x,y) = x^4(2xy + y^2 - y + 2) = c$$

ملاحظة

التفاضلات التالية تتكرر دائماً ويفضل الإلمام بها

(1) $d(xy) = ydx + xdy$ (2) $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$

(3) $d\,tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ (4) $d\left(\frac{1}{2}ln(x^2+y^2)\right) = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$

(5) $d(ln\,xy) = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$

تمارين 1.7

أوجد حل المعادلات التفاضلية التالية بطريقة فصل المتغيرات.

1) $y' = e^{-x-y}$

2) $y' = (y-1)(y-2)$

3) $y' = xy^2 + y^2 + xy + y$

4 $sinx\ cosydx + tany\ cosxdy = 0$

5) $(1 + ln\ x)dx + (1 + ln\ y)dy = 0$

6) $y' = cos^2xcosy$

7) $tan^2ydy = sin^3xdx$

8) $(e^{2x} + 4)y' = y$

بيِّن إذا كانت المعادلات التفاضلية التالية متجانسة وأوجد الحل العام لها:

9) $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$

10) $xy' - y = xe^{\frac{y}{x}}$

11) $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$

12) $(x^2 + 2xy - 4y^2)dx - (x^2 - 8xy - 4y^2)dy = 0$

بيّن إذا كانت المعادلة التفاضلية التالية تامة ثم أوجد الحل العام لها:

13) $(cos\ x\ cos\ y - cot\ x)dx - sin\ x\ y\ dy = 0$

14) $(2xy - tan\ y)dx + (x^2 - x\ sec^2y)dy = 0$

15) $[2xy\ cos(x^2) - 2xy + 1]dx + [sin(x^2) - x^2]dy = 0$

16) $[xcos(x+y) + sin(x+y)]dx + xcos(x+y)dy = 0$

17) $(2xy^2 + 2xye^{2x} + ye^{2x})dx + (2x^2y + xe^{2x})dy = 0$

18) $3xy(1+x^2)^{\frac{1}{2}}dx + [(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + siny]dy = 0$

أوجد العامل التكاملي لكل من المعادلات التفاضلية التالية ثم أوجد الحل العام في كل حالة.

$(3y + 3e^x y^{\frac{2}{3}})dx + xdy = 0$ (19

$(siny + x^2 + 2x)dx + cosy\ dy = 0$ (20

$(xy + y^2)dx + (xy - x^2)dy = 0$ (21

$(x + x^2y + y^3)dx + (y - x^3 - x^2y)dy = 0$ (22

أوجد الحل الخاص لكل من المعادلات التالية:

$(3xy + 2)dx + x^2dy = 0$ (23 حيث أن $y = 1$ عندما $x = 1$

$xy' + 2y = 2xcos2x + 2sin2y$ (24 حيث أن $y = 1$ عندما $x = \pi$

$3y(x^2 - 1)dx + (x^3 + 8y - 3x)dy = 0$ (25 حيث أن $y = 1$ عندما $x = 0$

$2x[3x + y - ye^{-x^2}]dx + [x^2 + 3y^2 + e^{-x^2}]dy = 0$ (26 حيث أن $y = 2$ عندما $x = 0$

5 ـ طريقة التعويض (Method Of Substitution)

تعتبر إحدى الطرق الهامة لحل المعادلة التفاضلية

$$Pdx + Qdy = 0 \qquad (1)$$

وتتلخص الطريقة في استخدام متغيرين جديدين u و v حيث أن

$$y = \psi(u,v),\ \ x = \phi(u,v) \qquad (2)$$

وبتطبيق قاعدة السلسلة (راجع التفاضل الجزئي):

$$dy = \frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv \ \text{ و } \ dx = \frac{\partial\phi}{\partial u}du + \frac{\partial\phi}{\partial v}dv$$

وبذلك يمكن التعبير عن المتغيرات dy, dx, y, x بالمتغيرات du, v, u وdv وبالتعويض في المعادلة (1) نجد أن:

$$P[(u,v),\psi(u,v)]\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}du + \frac{\partial\phi}{\partial v}dv\right)$$
$$+Q[\phi(u,v),\psi(u,v)]\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv\right) = 0$$

ويمكن أن تختزل المعادلة الأخيرة إلى الصورة التالية:

$$P_1(u,v)du + Q_1(u,v)dv = 0 \qquad (3)$$

حيث أن:

$$P_1 = P[Q(u,v),\psi(u,v)]\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \psi[\phi(u,v),\psi(u,v)]\frac{\partial\psi}{\partial u}du,$$

$$Q_1 = P[\phi(u,v),\psi(u,v)]\frac{\partial\phi}{\partial v}dv + \psi[\phi(u,v),\psi(u,v)]\frac{\partial\psi}{\partial v}dv$$

وإذا فرضنا أن الحل العام للمعادلة (3) يكتب كما يأتي:

$$u(u,v) = c \qquad (4)$$

ومن المعادلة (2) يمكن الحصول على u وv بدلالة x وy.

$$v = G(x,y), u = F(x,y)$$

وبالتعويض في المعادلة (4) نجد أن: $U[F(x,y), G(x,y)] = c$

والمعادلة الأخيرة تمثل الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$Pdx + Qdy = 0$$

وفيما يلي سنوضح الطريقة ببعض الأمثلة المحلولة.

مثـــال 1

أوجد حل المعادلة التفاضلية: $3x^2ye^ydx + x^3e^y(y+1)dy = 0$

الحـــل

نفرض أن $u = x^3$ و $v = ye^y$

وبإجراء عملية التفاضل: $du = 3x^2dx$ و $dv = (1+y)e^ydy$

والآن بالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن: $vdu + udv = 0$

والمعادلة الأخيرة يمكن فصل متغيراتها كما يلي: $\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} = 0$

وبعد إجراء التكامل نحصل على: $ln\ u + ln\ v = c \implies uv = \hat{c}$

ويكتب الحل العام كما يأتي:

$$\boxed{x^3ye^y = c}$$

مثـــال 2

أوجد حل المعادلة $(2x - 3y)dx - 3xdy = 0$

الحـــل

نفرض أن $u = x^2 - 3xy$ و $v = x + y$

وبإجراء عملية التفاضل: $du = (2x - 3y)dx - 3xdy$ و $dv = dx + dy$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن $du = 0$

وبتكامل الطرفين نحصل على: $u = c$

ويكتب الحل العام على الصورة التالية:

$$x^2 - 3xy = c$$

ملاحظة

في المثال السابق تم استخدام متغير واحد فقط وذلك لسهولة المسألة، كذلك يمكن استخدام متغير واحد u واعتبار أحد المتغيرين الأصليين x أو y كما في المثال التالي:

مثـــال 3

أوجد حل المعادلة التفاضلية: $(1 + 3x\ sin\ y)dx - x^2 cos\ y\ dy = 0$

الحـــل

نفرض $u = sin\ y$ وهذا يتضمن $du = cos\ y\ dy$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية: $(1 + 3xu)dx - x^2 du = 0$

المعادلة خطية في المتغير u وبذلك يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$\frac{du}{dx} - \frac{3}{x}u = \frac{1}{x^2} \qquad (*)$$

وهي معادلة خطية ومن الرتبة الأولى (راجع العوامل التكاملية).

$$\mu = exp\left(- \int \frac{3}{x} dx\right) = x^{-3}$$

وبضرب المعادلة (*) في العامل التكاملي

$$x^{-3}\frac{du}{dx} - 3x^{-4}u = x^{-5}$$

والمعادلة الأخيرة تكتب كما يأتي: $d(x^{-3}u) = x^{-5}$

وبتكامل الطرفين $(x^{-3}u) = -\frac{1}{4}x^{-4} + c$

ويمكن أن يكتب الحل العام كما يأتي:

$$4x \sin y = cx^4 - 1$$

6 ـ معادلة برنولي (Bernolli's Equation)

تعتبر من المعادلات المعروفة وتكتب على الصورة التالية:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \qquad (1)$$

إذا كانت $n = 1$ فإنه يمكن فصل المتغيرات وتحل المعادلة بالطريقة المعروفة (راجع فصل المتغيرات) ونركز على الحالة التي تكون فيها $n \neq 1$ المعادلة (1) يمكن كتابتها كما يأتي:

$$y^{-n}dy + Py^{1-n}dx = Qdx \qquad (2)$$

والآن نستخدم التعويض

$$z = y^{1-n}$$

ومنها $dz = (1-n)y^{-n}dy$

وبالتعويض في المعادلة (2) نجد أن:

$$dz + (1-n)Pzdx = (1-n)Qdx$$

وهي معادلة خطية في الصورة القياسية ويمكن إيجاد الحل بإحدى الطرق المعروفة، وبذلك أي معادلة على صورة معادلة برنولي يمكن حلها بالتعويض $z = y^{1-n}$ إلا إذا كانت $n = 1$ حيث أنه لا يتطلب تعويض.

مثال 1

أوجد حل المعادلة التالية: $siny\ (x + sin\ y)dx + 2x^2 cos\ y\ dy = 0$

الحل

نفرض أن $u = sin\ y$ ومنها $du = cos\ y\ dy$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن:

$$u(x+u)dx + 2x^2 du = 0 \qquad (1)$$

ويمكن كتابة المعادلة الأخيرة كما يلي:

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{2x}u = -\frac{u^2}{2x^2} \qquad (2)$$

والمعادلة الأخيرة هي عبارة عن معادلة برنولي حيث أن $n = 2$، إذن يمكن استخدام التعويض $z = u^{-1}$ ومنها $dz = -u^{-2}du$

وبالتعويض في المعادلة (2) نجد أن:

$$dz - \frac{1}{2x}zdx = \frac{dx}{2x^2}$$

أو

$$\frac{dz}{dx}-\frac{1}{2x}z=\frac{1}{2x^2} \qquad (3)$$

وهي معادلة خطية على الصورة القياسية، وهذا يتضمن أن العامل التكاملي يكتب كما يلي:

$$\mu = e^{-\int \frac{1}{2x}dx}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}lnx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

وبضرب طرفي المعادلة (3) في العامل التكاملي:

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{dz}{dx}-\frac{1}{2}x^{-\frac{2}{3}}z=\frac{1}{2}x^{-\frac{5}{2}}$$

أو

$$d\left(x^{-\frac{1}{2}}z\right)=\frac{1}{2}x^{-\frac{5}{2}}$$

وبتكامل الطرفين نحصل على العلاقة التالية:

$$x^{-\frac{1}{2}}z=-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+c$$

أو

$$z=-\frac{1}{3}x^{-1}+c\sqrt{x}$$

ولكن $z=u^{-1}$ و $u=siny$

وبذلك

$$\frac{1}{siny}+\frac{1}{3x}=c\sqrt{x}$$

وبضرب المعادلة الأخيرة في $3x\ siny$ وهذا يتضمن: $Z=\frac{1}{siny}$

$$3x+sin\ y=\hat{c}x\sqrt{x}\ sin\ y$$

وبتربيع طرفي المعادلة الأخيرة نجد أن:

$$(3x + \sin y)^2 = cx^3 \sin^2 y$$

مثـال 2

أوجد حل المعادلة

$$6y^2dx - x(2x^3 + y)dy = 0 \qquad (1)$$

الحـل

يمكن كتابة المعادلة التفاضلية كما يلي:

$$6y^2\frac{dx}{dy} - 2x^4 - xy = 0$$

ومنها

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{6y}x = \frac{1}{3y^2}x^4 \qquad (2)$$

والمعادلة الأخيرة عبارة عن معادلة برنولي ويمكن استخدام التعويض التالي:
$z = x^{-3}$ ومنها $dz = -3x^{-4}dx$
وبالتعويض في المعادلة (2):

$$dz + \frac{1}{2y}zdy = -\frac{1}{y^2}dy$$

أو

$$\frac{dz}{dy} + \frac{1}{2y}z = -\frac{1}{y^2} \qquad (3)$$

وهي معادلة خطية على الصورة القياسية ويكتب العامل التكاملي على الصورة التالية:

$$\mu = exp\Big(\int \frac{1}{2y} dy\Big) = \sqrt{y}$$

وبضرب المعادلة (3) في العامل التكاملي

$$\sqrt{y}\frac{dz}{dy} + \frac{1}{2\sqrt{y}} z = -y^{-\frac{3}{2}}$$

أو

$$d(z\sqrt{y}) = -y^{-\frac{3}{2}}$$

وبتكامل طرفي المعادلة نجد أن:

$$z\sqrt{y} = 2y^{-\frac{1}{2}} + c$$

وبالتعويض عن $z = x^{-3}$ في المعالدة السابقة نجد أن:

ومنها

$$y - 2x^3 = cx^3\sqrt{y}$$

وبتربيع الطرفين نجد أن:

$$(y - 2x^3)^2 = cx^6 y$$

ملاحظة

يمكن حل المسألة باستخدام التعويض $u = x^3$ ويترك ذلك كتمرين للقارىء.

تمارين 2.7

أوجد حل المعادلات التفاضلية التالية:

(1 $y' = y - xy^3e^{-2x}$

(2 $(3\tan x - 2\cos y)\sec^2 x\, dx + \tan x \sin y\, dy = 0$

(3 $(3\sin y - 5x)dx + 2x^2\cot y\, dy = 0$

(4 $\cos y \sin 2x\, dx + (\cos^2 y - \cos^2 x)dy = 0$

(5 $y' = 1 + 6xe^{x-y}$

(6 $(2x \sin xy + x^2y \cos xy)dx + x^3\cos xy\, dy = 0$

(7 $(2x^3y^2 + 3x^2y^3 - 1)dx + (2x^4y + x^3y^2 - 1)dy = 0$

(8 $(1 + 3x + 3y - x^2 + 2xy - y^2)dx + (1 - 3x - 3y + x^2 - 2xy + y^2)dy = 0$

(9 $(3xe^{3x}\sin 2y + e^{3x}\sin 2y)dx + (2xe^{3x}\cos 2y + 2y)dy = 0$

(10 $y^3\sec^2 x dx - (1 - 2y^2\tan x)dy = 0$

(11 $y' = \tan y \cot x - \sec y \cos x$

(12 $(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)dx + 4x^3ydy = 0$

3.7 المعادلات التفاضلية الخطية (Linear Differential Equations)

تكتب المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n على الصورة التالية:

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dxtn}+a^1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=4(x) \quad (1)$$

حيث أن الدوال $a_n(x)...a_1(x), a_0(x)$ و $R(x)$مستقلة عن المتغير y، وإذا كانت $r(x)=0$، فإن المعادلة (1) تكون خطية ومتجانسة وتسمى خطية وغير متجانسة إذا كانت غير ذلك.

إذا كان y_1 وy_2 يحققان المعادلة التفاضلية المتجانسة، فإن:

$$y=c_1y_1+c_2y_2$$

يحقق المعادلة المتجانسة أيضاً.

الاستقلال الخطي (Linear Independence)

نفرض أن $f_n..., f_1$ دوال معطاة، وإذا وجدت ثوابت $c_n..., c_2, c_1$ لا تساوي الصفر جميعاً حيث أن:

$$c_1f_1(x)+...+c_nf_n(x)=0$$

على الفترة $[a,b]$، فإن الدوال المذكورة تكون تابعة أو مرتبطة خطياً وإذا كانت العلاقة السابقة غير موجودة، فإن الدوال تكون مستقلة خطياً. أي أن الدوال تكون مستقلة خطياً إذا كانت العلاقة تتضمن $c_1=c_2=...=c_n=0$

وإذا فرضنا أن الدوال السابقة قابلة للتفاضل إلى الرتبة $(n-1)$ على الأقل، فإنه بأخذ المشتقات مرات متتالية نجد أن:

$$c_1f_1 + c_2f_2 + .. + c_nf_n = 0$$

$$c_1f'_1 + c_2f'_2 + ... + c_nf'_n = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$c_1f_1^{(n-1)} + c_2f_2^{(n-1)} + ... + c_nf_n^{(n-1)} = 0$$

ويمكن كتابة منظومة المعادلات السابقة على الصورة التالية:

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f'_1 & f'_2 & \cdots & f'_2 \\ . & & & \\ . & & & \\ f_1^{n-1} & f_2^{n-1} & \cdots & f_2^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

وإذا كان محدد المصفوفة لا يساوي الصفر، فإن $c_i = 0$ لكل $i = 1, 2, ..., n$ وهكذا نستطيع القول إن الدوال $f_1, f_2, ..., f_n$ مستقلة خطياً إذا كان:

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f'_1 & f'_2 & \cdots & f'_n \\ . & & & \\ . & & & \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

المحدد يسمى محدد رونسكي نسبة إلى عالم الرياضيات البولندي هوني رونسكي (1778-1853) Hoene Wronski.

مثال 1

بيّن أن الدوال التالية e^x, e^{2x}, e^{3x} مستقلة خطياً.

الحــل

يكتب محدد رونسكي للدوال الثلاث كما يلي:

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix}$$

ومن خواص المحددات:

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ 0 & e^{2x} & 2e^{3x} \\ 0 & 3e^{2x} & 8e^{3x} \end{vmatrix}$$

وبفك المحدد باستخدام العمود الأول نجد أن:

$$W = \begin{vmatrix} e^{2x} & 2e^{3x} \\ 3e^{2x} & 8e^{3x} \end{vmatrix} = e^x(8e^{5x} - 6e^{5x})$$

$$= 2e^{6x} \neq 0$$

إذن الدوال مستقلة خطياً.

الحل العام للمعادلة المتجانسة

(The General Solution Of a Homogeneous Equation)

يعرف الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

كما يلي:
$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n$$

حيث أن $c_1, c_2, ..., c_n$ ثوابت. و $\{y_1, ..., y_n\}$ فئة من الحلول المستقلة خطياً للمعادلة (1).

الحل العام للمعادلة غير المتجانسة

(The General Soluion Of a Nonhomogeneous Equation)

إذا كان y_p حلاً خاصاً (particular) للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة.

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = R(x)$$

وإذا كان y_c حلاً للمعادلة التفاضلية المتجانسة المناظرة، فإن:

$$y = y_c + y_p$$

يعتبر حلاً للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة.

المؤثرات التفاضلية (The Differential Operators)

إذا كانت $Dy = \frac{dy}{dx}, D^2y = \frac{d^2y}{dx^2}$، فإنه بصورة عامة

$$D^ky = \frac{d^ky}{dx^k}$$

حيث أن k عدد صحيح موجب

والتعبير

$$A = a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_{n-1}D + a_n$$

يسمى مؤثراً تفاضلياً من الرتبة n.

قوانين العمليات الأساسية

إذا كانت B, A و C مؤثرات تفاضلية، فإن:

1) $A+B=B+A$ 	2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

3) $(AB)C=A(BC)$ 	4) $A(B+C)=AB+AC$

وإذا كانت عوامل المؤثرين A و B مقادير ثابتة، فإن:

5) $AB=BA$

ملاحظة

إذا كان m و n أي عددين صحيحين، فإن:

$$D^m D^n = D^{m+n}$$

بعض خواص المؤثرات التفاضلية

إذا كانت m مقداراً ثابتاً و k عدداً صحيحاً موجباً، فإن:

$$D^k e^{mx} = m^k e^{mx}$$

ومن السهل معرفة تأثير المؤثر التفاضلي على e^{mx}، إذا كانت $f(D)$ متعددة الحدود حيث أن:

$$f(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + ... + a_{n-1} D + a_n$$

فإن

$$f(D)e^{mx} = a_0 m^n e^{mx} + a_1 m^{n-1} e^{mx} + ... + a_{n-1} m e^{mx} + a_n e^{mx}$$

$$= e^{mx}(a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + ... + a_{n-1} m + a_n)$$

$$= e^{mx} f(m)$$

والآن نعتبر تأثير المؤثر $D-a$ على ye^{ax}

$$(D-a)(ye^{(ax)}) = D(ye^{ax}) - aye^{ax}$$

$$= e^{ax}Dy + aye^{ax} - aye^{ax}$$

$$= e^{ax}Dy$$

وبصورة مماثلة

$$(D-a)^2(ye^{ax}) = e^{ax}D^2y$$

وبصورة عامة:

$$(D-a)^n(ye^{ax}) = e^{ax}D^ny$$

وإذا كانت عوامل المؤثر التفاضلي ثابتة و$f(D)$ متعددة الحدود، فإن:

$$e^{ax}f(D)y = f(D-a)[e^{ax}y]$$

والعلاقة السابقة توضح لنا كيفية نقل الأس من يسار العامل التفاضلي إلى يمينه وتسمى باختصار تبديل الأس أو نقل الأس.

مثـال 2

إذا كان A وB مؤثرين تفاضليين، حيث أن $A = D+1$ و $B = 2D-1$ فبين أن $AB = BA$

الحـل

نفرض أن الدالة y قابلة للتفاضل مرتين على الأقل، وبتطبيق المؤثر التفاضلي AB على الدالة y نجد أن:

$$(AB)(y) = (D+1)(2D-1)(y)$$

$$= (D+1)\left(2\frac{dy}{dx} - y\right)$$

$$= 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2\frac{dy}{dx} - y$$

$$= 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - y \qquad (1)$$

وبصورة مماثلة

$$(B\ A)(y) = (2D-1)(D+1)(y)$$

$$= (2D-1)\left(\frac{dy}{dx} + y\right)$$

$$= 2\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} - y$$

$$= 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - y \qquad (2)$$

من (1) و(2) نستنتج أن $AB = BA$

مثـــال 3

بيّن أن $(D-m)^n(x^k e^{mx}) = 0$ حيث أن $k = 0, 1, ...(n-1)$

الحــل

نفرض أن $f(D) = (D-m)^n$ و $y = x^k$

ولكن $(D-m)^n(x^k e^{mx}) = e^{mx} D^n x^k$

وبما أن $k < n$، إذن $D^n x^k = 0$

وهذا يتضمن $(D-m)^n(x^k e^{mx}) = 0$

مثـال 4

أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية: $(D-2)^3y=0$

الحـل

بضرب طرفي المعادلة في الدالة $\overline{e}^{2x}$ نجد أن: $e^{2x}(D-2)^3y = D^3(e^{2x}y) = 0$
وبإجراء عملية التكامل ثلاث مرات متتالية نحصل على:

$$D^2(\overline{e}^{2x}y) = c_3$$

$$D(\overline{e}^{2x}y) = c_3x + c_2$$

$$\overline{e}^{2x}y = \frac{1}{2}c_3x^2 + c_2x + c_1$$

أو

$$y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-2x}$$

تمارين 3.7

1) أوجد محدد رونسكي للدوال التالية:

أ) $x, x^2, ..., x^{n-1}$ حيث أن $n > 1$ ب) $e^x, cosx, sinx$

2) أوجد ما يأتي:

أ) $(D-x)(D+x)$ ب) $(xD-1)(xD+2)$

3) أوجد حل المعادلات التالية بطريقة تبديل الأس

أ) $(D^2+1)^2y=0$ ب) $(2D-1)^2y=0$ جـ) $(D+7)^6y=0$

4.7 المعادلات التفاضلية الخطية ذات العوامل الثابتة

توجد عدة طرق لحل هذا النوع من المعادلات وسنذكرها بصورة مختصرة ولكل طريقة مميزاتها وعيوبها وكل طريقة متكاملة نظرياً وكلها مهمة جداً لاكتساب براعة كاملة في حل مسائل المعادلات التفاضلية، وسنقدم الطرق الكلاسيكية في هذا البند والذي يليه، ونقدم الطرق الأخرى في البنود التالية:

1) المعادلة المميزة (The Auxiliary Equation)

المعادلة التفاضلية الخطية ذات العوامل الثابتة تكتب على الصورة التالية:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = 0 \quad (1)$$

والتي يمكن أن تكتب كما يلي:

$$f(D)y = 0 \quad (2)$$

حيث أن $f(D)$ مؤثر تفاضلي، وإذا كانت m أي جذر للمعادلة الجبرية $f(m) = 0$، فإن:

$$f(D)e^{mx} = 0$$

وهذا يعني أن e^{mx} حل للمعادلة (2)

والمعادلة

$$f(m) = 0$$

تسمى المعادلة المميزة.

وتعتمد الصورة النهائية للحل العام على نوعية جذور المعادلة المميزة وتوجد ثلاث حالات.

الحالة الأولى: جذور المعادلة المميزة حقيقية ومختلفة

إذا كانت المعادلة المميزة من الدرجة n، فإنه توجد n من الجذور

$$m_1, m_2, m_3, ..., m_n$$

وإذا كانت كل هذه الجذور حقيقية ومختلفة، فإن الحل العام يكتب على الصورة التالية:

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + ... + c_n e^{m_n x}$$

مثـــال 1

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$y^{(4)} - 2y^{(3)} - 13y'' + 38y' - 24y = 0$$

الحـــل

يمكن كتابة المعادلة التفاضلية على الصورة التالية:

$$(D^4 - 2D^3 - 13D^2 + 38D - 24)y = 0$$

المعادلة المميزة تكتب كما يلي:

$$m^4 - 2m^3 - 13m^2 + 38m - 24 = 0 \quad (1)$$

ولمعرفة جذور المعادلة نجرّب المقدار $m = 1$

وبالتعويض في المعادلة نجد أن $m = 1$ يحقق المعادلة

أي أن $m - 1$ عامل لـ $m^4 - 2m^3 - 13m^2 + 38m - 24$

وبإجراء عملية القسمة المطولة:

$m^4 - 2m^3 - 13m^2 + 38m - 24$ $\quad m - 1$

$m^3 - m^2 - 14m + 24$

$m^4 - m^3$

$- - - -$

$-m^3 - 13m^2$

$-m^3 + m^2$

$- - - - -$

$-14m^2 + 38m$

$-14m^2 + 14m$

$- - - - - -$

$24m - 24$

$24m + 24$

$- - - -$

$- -$

ويمكن كتابة المعادلة (1) كما يلي:

$$(m-1)(m^3 - m^2 - 14m - 24) = 0$$

ومن السهل معرفة أن $m = 2$ تحقق المعادلة السابقة

أي أن:

$m - 2$ عامل لـ $m^3 - m^2 - 14m - 24$

وبإجراء عملية القسمة المطولة:

$m^3 - m^2 - 14m + 24$ $\quad \underline{|m - 2}$

$m^2 + m - 12$

$m^3 - 2m^2$

$- - - -$

$m^2 - 14m$

$m^2 - 2m$

$- - - -$

$-12m + 24$

$-12m + 24$

$- - - -$

$- -$

وهكذا يمكن كتابة المعادلة المميزة على الصورة التالية:

$$(m-1)(m-2)(m^2+m-12)=0$$

المعادلة السابقة تكتب كما يلي:

$$(m-1)(m-2)(m-3)(m+4)=0$$

إذن جذور المعادلة حقيقية ومختلفة وهي:

$$1, 2, 3, -4$$

ويكتب الحل العام كما يلي:

$$y=c_1e^{x}+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}+c_4e^{-4x}$$

ملاحظة

لاحظ أن جذور المعادلة المميزة هي من فئة العوامل الصحيحة للمقدار الثابت (24) في المعادلة المميزة.

مثـــال 2

أوجد الحل الخاص للمعادلة التالية $(D^2-2D-3)y=0$

حيث أن $y=0$ و$y'=-4$ عندما $x=0$

الحــل

المعادلة المميزة

$$m^2-2m-3=0$$

أو

$$(m-3)(m+1)=0$$

وهذا يتضمن أن جذور المعادلة المميزة:

$$m=3,-1$$

إذن الحل العام يكتب كما يلي:

$$y=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}$$

وعندما $x=0$ نجد أن:

$$0=c_1+c_2 \qquad (1)$$

وبتفاضل المعادلة ما قبل الأخيرة نجد أن:

$$y'=3c_1e^{3x}-c_2e^{-x}$$

وعندما $y'=-4$ و $x=0$ نحصل على:

$$-4=3c_1-c_2 \qquad (2)$$

من المعادلة (1) $c_2=-c_1$

وبالتعويض في المعادلة (2)

$$-4=3c_1+c_1$$

وهذا يتضمن $c_1=-1$ و $c_2=1$

وبالتعويض عن c_1 وc_2 في الحل العام نحصل على الحل الخاص:

$$y=e^{-x}-e^{3x}$$

الحالة الثانية: جذور المعادلة المميزة حقيقية ومتكررة

إذا كانت جذور المعادلة المميزة متكررة، أي أن

$$m_1 = m_2 = ...m_n = b$$

فإن المؤثر التفاضلي $f(D)$ يكتب كما يلي:

$$f(D) = (D-b)^n$$

إذن نأمل أن نبحث عن حل يحقق المعادلة

$$(D-b)^n y = 0$$

ويكتب الحل العام للمعادلة السابقة على الصورة التالية:

$$y = c_1 e^{bx} + c_2 x e^{bx} + ... + c_n x^{n-1} e^{bx}$$

مثال 3

أوجد حل المعادلة $(D^5 - D^3)y = 0$

الحل

المعادلة المميزة:

$$m^5 - m^3 = 0$$

وبأخذ m^3 عامل مشترك.

$$m^3(m^2-1) = 0$$

وهذا يتضمن أن $m = 0$ ثلاث مرات و $m = \pm 1$

وهكذا يمكن كتابة الحل العام كما يلي:

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-x} + c_5 e^{x}$$

مثال 4

أوجد الحل الخاص للمعادلة $(D^3 + 2D^2)y = 0$

حيث أن $y = -3$ و $y' = 0$ و $y'' = 12$ عندما $x = 0$

الحل

المعادلة المميزة تكتب كما يلي:

$$m^3 + 2m^2 = 0$$

أو

$$m^2(m+2) = 0$$

أي أن $m = 0$ مرتين و $m = -2$

وهكذا يكتب الحل العام كما يلي:

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-2x}$$

وعندما $x = 0$ فإن:

$$c_1 + c_3 = -3 \qquad (1)$$

وبأخذ المشتقة للحل العام بالنسبة للمتغير x نجد أن:

$$y' = c_2 - 2c_3 e^{-2x}$$

ولكن $y' = 0$ عندما $x = 0$ وبالتعويض في المعادلة السابقة

$$c_2 - 3c_3 = 0 \qquad (2)$$

كذلك

$$y'' = 4c_3 e^{-2x}$$

وعندما $x = 0$، فإن $y'' = 12$ وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد أن:

$$12 = 4c_3 \Longrightarrow c_3 = 3$$

ومن المعادلة (2) واضح أن $c_2 = 2c_3 = 6$، ومن المعادلة (1) نجد أن $c_1 = -3 - c_3$ أي أن $c_1 = -6$

وهكذا يكتب الحل الخاص على الصورة التالية:

$$y = -6 + 6x + 3e^{-2x}$$

الحالة الثالثة: جذور المعادلة المميزة أعداد مركبة

إذا كانت عوامل المعادلة المميزة حقيقية، فمن المبادىء الأولية في الجبر نعرف أنه إذا كان لها جذور مركبة، فإن هذه الجذور توجد على صورة مرافقات، أي أنه إذا كان العدد المركب $m_1 = a + ib$ حيث أن z وb عددان حقيقيان يحققان المعادلة المميزة $f(m) = 0$

فإن $m_2 = a - ib$

يحقق المعادلة المميزة $f(m) = 0$ أيضاً.

وحسب الحالة الأولى يأخذ الحل لعام للمعادلة $f(D)y = 0$ الصورة التالية:

$$y = c_1e^{(a+ib)x} + c_2e^{(a-ib)x}$$

$$= c_1e^{ax}e^{ibx} + c_2e^{ax}e^{-ibx}$$

$$= c_1e^{ax}(cosbx + isinbx) + c_2e^{ax}(cosbx - isinbx)$$

يمكن كتابة المعادلة السابقة كما يلي:

$$y = (c_1 + c_2)e^{ax}cosbx + i(c_1 - c_2)e^{ax}sinbx$$

والآن نفرض أن $\hat{c}_1 = c_1 + c_2$ و $\hat{c}_2 = i(c_1 - c_2)$

وهكذا يكتب الحل العام على الصورة التالية:

$$y = \hat{c}_1 e^{ax} cosbx + \hat{c}_2 e^{ax} sinbx$$

مثـــال 5

أوجد حل المعادلة التالية: $(D^2 - 4D + 7)y = 0$

الحـــل

المعادلة المميزة تكتب كما يلي:

$$m^2 - 4m + 7 = 0$$

ويمكن حل المعادلة السابقة باستخدام القانون العام

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 28}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}\, i$$

وهكذا يكتب الحل العام كما يلي:

$$y = c_1\, e^{2x} cos\sqrt{3}\, x + c_2\, e^{2x}\, sin\sqrt{3}\, x$$

مثـــال 6

أوجد حل المعادلة

$$(D^6 + 9D^4 + 24D^2 + 16)y = 0 \qquad (1)$$

الحـــل

المعادلة المميزة تكتب كما يلي: $m^6 + 9m^4 + 24m^2 + 16 = 0$

واضح أنه لا توجد جذور حقيقية (لماذا؟).

ونبدأ بتجربة $m = i$ وبالتعويض في المعادلة (1) نجد أن $m = i$ تحقق المعادلة (1) كذلك $m = -i$ تحقق المعادلة (1) أيضاً، وهذا يتضمن أن $m^2 + 1$ عامل للطرف الأيسر من المعادلة المميزة.

وباستخدام القسمة المطولة:

$$m^6 + 9m^4 + 24m^2 + 16 \;\big|\; \underline{m^2 + 1}$$

$$m^4 + 8m^2 + 16$$

$m^6 + m^4$

$- \; - \; - \; -$

$8m^4 + 24m^2$

$8m^4 + 8m^2$

$- \; - \; - \; -$

$16m^2 + 16$

$16m^2 + 16$

$- \; - \; - \; -$

$- \; -$

وبذلك يمكن كتابة المعادلة (1) كما يلي:

$$(m^4 + 8m^2 + 16)(m^2 + 1) = 0$$

أو

$$(m^2 + 4)^2(m^2 + 1) = 0$$

إذن جذور المعادلة هي $m = \pm i$, $m = \pm 2i$ مرتان

وهكذا يمكن كتابة الحل العام كما يلي:

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$$
$$+ x(c_5 \cos 2x + c_6 \sin 2x)$$

مثـــال 7

أوجد الحل العام للمعادلة التالية:

$$(D^6 + 5D^5 + 2D^4 - 16D^3 - 17D^2 - 21D - 18)y = 0$$

الحـــل

المعادلة المميزة $m^6 + 5m^5 + 2m^4 - 16m^3 - 17m^2 - 21m - 18 = 0$

ويترك للقارىء أن يبين أن المعادلة السابقة يمكن كتابتها كما يلي:

$$(m+1)(m+3)(m-2)(m+3)(m^2+1) = 0$$

وهكذا يمكن كتابة الحل العام على الصورة التالية:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x} + c_3 x e^{-3x} + c_4 e^{2x} + c_5 cosx + c_6 sinx$$

تمارين 4.7

أوجد الحل العام للمعادلات التالية:

1) $(D^2 + D - 6)y = 0$

2) $(4D^3 - 3D + 1)y = 0$

3) $(4D^3 - 21D - 10)y = 0$

4) $(4D^4 - 24D^3 + 35D^2 + 6D - 9)y = 0$

5) $(D^5 + D^4 - 6D^3)y = 0$

6) $(D^5 - 2D^3 - 2D^2 - 3D - 2)y = 0$

7) $(2D^3 - D^2 - 36D - 18)y = 0$

8) $(D^5 + D^4 - 7D^3 - 11D^2 - 8D - 12)y = 0$

حقق إجابتك في كل حالة.

5.7 المعادلات التفاضلية غير المتجانسة

كما سبق الحل العام للمعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$(a_0D^n + a_1D^{n-1} + ... + a_n)y = R(x) \qquad (1)$$

يكتب كما يلي:

$$y = y_c + y_p$$

حيث أن y_c عبارة عن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة المناظرة للمعادلة (1) وy_p أي حل خاص للمعادلة (1).

توجد عدة طرق لحل المعادلة التفاضلية (1) حيث أن $a_0, a_1, ..., a_n$ مقادير ثابتة ونقدم في هذا البند طريقة العوامل غير المحددة.

1 ـ طريقة العوامل غير المحددة (The method of undetermined coefficients)

وقبل دراسة هذه الطريقة من المهم جداً معرفة طريقة إيجاد المعادلة التفاضلية المتجانسة المناظرة لدالة مناسبة وستتضح هذه الطريقة من الأمثلة التالية:

مثال 1

أوجد المعادلة التفاضلية المتجانسة ذات العوامل الثابتة التي حلها الخاص

$$y = 7 - 2x + \frac{1}{2}e^{4x}$$

الحل

الدوال $e^{4x}, x, 7$ تبيّن أن المعادلة المطلوبة تحقق الدالة التالية:

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^{4x}$$

بغض النظر عن المقادير الثابتة c_2, c_1 وc_3 ويمكن إيجاد المعادلة المتجانسة كما يأتي :

أ) الحدان $c_1 + c_2x$ يناظرهما جذرا المعادلة المميزة 0 و$m = 0$

ب) الحد c_3e^{4x} يناظره جذر المعادلة المميزة $m = 4$

وهكذا نستطيع القول إن المعادلة المميزة المناظرة للدالة :

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^{4x}$$

تكتب كما يلي :

$$m^2(m-4) = 0$$

وهذا يتضمن أن المعادلة التفاضلية المناظرة:

$$D^2(D-4)y = 0$$

مثـــال 2

أوجد المعادلة التفاضلية المتجانسة التي تحققها الدالة

$$y = 2e^x sin3x$$

الحـــل

المعادلة المطلوبة يكون لها معادلة مميزة جذريها $m = 1 \pm 3i$

والجذران $m = 1 \pm 3i$ يناظرهما العامل $(m-1)^2 + 9$

وهكذا يمكن كتابة المعادلة المميزة كما يلي :

$$(m-1)^2 + 9 = 0$$

أو

$$m^2 - 2m + 10 = 0$$

أي أن المعادلة التفاضلية المتجانسة المطلوبة تكتب كما يلي:

$$(D^2 - 2D + 10)y = 0$$

مثال 3

أوجد المعادلة التفاضلية التي تحققها الدالة $y = 2coshx - 5sinhx$

الحل

يفضل كتابة الدالة السابقة (الحل الخاص) كما يلي:

$$y = c_1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} - c_2 \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$= \hat{c}_1 e^x + \hat{c}_2 e^{-x}$$

حيث أن $\hat{C}_1 = \frac{1}{2}(C_1 - C_2)$ و $\hat{C}_2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)$

الحدان e^{-x} و e^x يناظرهما جذرا المعادلة المميزة 1 و $m = -1$
وهكذا تكتب المعادلة المميزة كما يلي:

$$(m + 1)(m - 1) = 0$$

وتكتب المعادلة التفاضلية التي تناظرها على الصورة التالية:

$$(D^2 - 1)y = 0$$

وبعد تقديم هذه الأمثلة والتي نأمل أنها أدت الغرض المطلوب نقدم طريقة العوامل غير المحددة.

طريقة العوامل غير المحددة

نعتبر المعادلة التالية:

$$f(D)y = R(x) \tag{1}$$

ونفرض أن جذور المعادلة المميزة $f(m) = 0$ هي

$$m = m_1, m_2, ..., m_n \tag{2}$$

والحل العام للمعادلة (1) يكتب كما يلي:

$$y = y_c + y_p$$

حيث أن y_c يكون حلاً للمعادلة المتجانسة $f(D)y = 0$ وy_p الحل الخاص (particular) للمعادلة (1).

والآن نفرض أن الجانب الأيمن للمعادلة (1) أي $R(x)$ حل خاص لمعادلة تفاضلية متجانسة ذات عوامل ثابتة.

$$g(D)R = 0 \tag{3}$$

ونفرض أن جذور المعادلة المميزة المناظرة للمعادلة (3):

$$m^1 = m_1^1, m_2^1, ..., m_k^1 \tag{4}$$

جذور المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية

$$g(D)f(D)y = 0 \tag{5}$$

تشتمل على قيم m في (2) و m' في (4).

وهكذا الحل العام للمعادلة (5) يشتمل على y_c حيث أن y_c حل المعادلة التفاضلية $f(D)y = 0$ ويكتب على الصورة التالية:

$$y = y_c + y_q$$

كذلك أي حل خاص للمعادلة (1) يحقق المعادلة (5).

وإذا كان $f(D)(y_c + y_q) = R(x)$

فإن $f(D)y_q = R(x)$ لأن $f(D)y_c = 0$

وهكذا بشطب y_c من الحال العام للمعادلة (5) نحصل على y_q التي تحقق المعادلة (1) لبعض قيم عددية معينة لعواملها، أي أن العوامل في y_q يمكن إيجادها أو تحديدها حيث أن $y_q = y_p$، وتحديد العوامل العددية يتضح أكثر من المثال التالي

مثال 1

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية:

$$(D^2+4)y = 4sin^2x$$

الحل

الجانب الأيمن ليس من الصور القياسية ولكن $sin^2x = \frac{1}{2}(1-cos2x)$ وبذلك يمكن كتابة المعادلة التفاضلية السابقة كما يلي:

$$(D^2+4)y = 2 - 2cos2x \qquad (*)$$

ومنها $m = \pm 2i$ و $m^1 = 0, \pm 2i$

وهكذا $y_c = c_1\, cos2x + c_2 sin2x$

و $y_p = A + Bx\, cos\, 2x + Ex\, sin\, 2x$

$$= A + x(B\, cos2x + E\, sin2x)$$

والمطلوب الآن إيجاد القيم العددية للمقادير E, B, A.

وبما أن y_p يحقق المعادلة (*) حيث أن:

$$y_p' = B\, cos\, 2x + E\, sin\, 2x + x(-2B\, sin\, 2x + 2E\, cos\, 2x),$$

$$y_p'' = -2B\, sin\, 2x + 2E\, cos\, 2x - 2B\, sin\, 2x + 2E\, cos\, 2x$$

$$+x(-4B\, cos\, 2x - 4E\, sin\, 2x)$$

وبالتعويض عن y_p وy_p'' في المعادلة (*) واختصار العوامل المتشابهة نجد أن:

$$4E\ cos\ 2x - 4B\ sin\ 2x + 4A = 2 - 2cos\ 2x$$

وهذا يتضمن $A = \frac{1}{2}$ و $B = 0$ و $E = -\frac{1}{2}$

وهكذا يكتب الحل العام على الصورة التالية:

$$y = c_1\ cos\ 2x + c_2\ sin\ 2x + \frac{1}{2}(1-x)sin\ 2x$$

مثــال 2

أوجد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية التالية: $y''' - y' = 4e^{-x} + 3e^{2x}$

حيث أن $y = 0$, $y' = -1$ و $y'' = 2$ عندما $x = 0$

الحــل

$$m^1 = -1, 2, m = 0, 1, -1$$

لاحظ أن الجذر $(y = -1)$ متكرر مرتين وهكذا

$$y_c = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x}$$

$$y_p = Axe^{-x} + Be^{2x}$$

وبذلك

$$y_p' = Ae^{-x} - Axe^{-x} + 2Be^{2x}$$

$$y_p'' = -Ae^{-x} - Ae^{-x} + Axe^{-x} + 4Be^{2x}$$

$$y_p''' = 2Ae^{-x} + Ae^{-x} - Axe^{-x} + 8Be^{2x}$$

$$= 3Ae^{-x} - Axe^{-x} + 8Be^{2x}$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن:

$$2Ae^{-x} + 6Be^{2x} = 4e^{-x} + 3e^{2x}$$

وهذا يتضمن $A = 2$ و $B = \frac{1}{2}$

وهكذا يكتب الحل العام على الصورة التالية:

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x} + 2xe^{-x} + \tfrac{1}{2}e^{2x} \end{aligned}$$

ولإيجاد الحل الخاص نتبع الآتي:

$$y' = c_2e^x - c_3e^{-x} + 2e^{-x} - 2xe^{-x} + e^{2x}$$

$$y'' = c_2e^x + c_3e^{-x} - 2e^{-x} - 2e^{-x} + 2xe^{-x} + 2e^{2x}$$

وحسب الشروط المعطاة نجد أن:

$$c_1 + c_2 + c_3 + \tfrac{1}{2} = 0$$

$$c_2 - c_3 + 3 = -1$$

$$c_2 + c_3 - 2 = 2$$

ويمكن كتابة المعادلات السابقة على صورة معادلة مصفوفية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ويمكن استخدام طريقة جاوس لحل المعادلات السابقة أي أن:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

وهكذا $2c_3 = 8$ ومنها $c_3 = 4$

و $c_2 - c_3 = -4$ ومنها $c_2 = 0$

وأخيراً $c_1 + c_2 + c_3 = -\frac{1}{2}$ وهذا يتضمن $c_1 = -\frac{1}{2} - 4 = -4.5$

والآن يمكن كتابة الحل الخاص على الصورة التالية:

$$y = -4.5 + 4e^{-x} + 2xe^{-x} + 0.50e^{2x}$$

ملاحظة

الطريقة السابقة قابلة للتطبيق فقط عندما يكون الجانب الأيمن حلاً لمعادلة تفاضلية متجانسة أي على الصورة القياسية.

تمارين 5.7

أوجد المعادلات التفاضلية التي تحققها الدوال التالية:

1) $y = 2e^{x}cos3x$

2) $y = xsin2x$

3) $y = xe^{-x}sin2x + 3e^{-x}cos2x$

4) $y = 4sinhx$

5) $y = x^2 - x + e^{-x}(x + cosx)$

6) $y = sin^3x$

أوجد الحل العام للمعادلات التالية:

7) $y'' - 3y' - 4y = 5e^{4x}$

8) $y'' - y' - 2y = 6x + 6e^{-x}$

9) $(D^2+1)y = 12cos^2x$ 10) $(D^3+D^2-4D-4)y = 8+8x+6e^{-x}$

أوجد الحل الخاص للمعادلات التالية:

11) $y'' + 2y' + y = x$ حيث أن $y=-3$ عندما $x=0$ و $y=-1$ عندما $x=1$

12) $(D^2+4D+5)y = 10e^{-3x}$ حيث أن $y=4$ و $y'=0$ عندما $x=0$

13) $y'' + 2y' + 5y = 8e^{-x}$ حيث أن $y=0$ و $y'=8$ عندما $x=0$

6.7 تغاير البارامترات (الوسيطات) (Variation Of Parameters)

عرفنا في البند السابق أن طريقة المعادلات غير المحددة قابلة للتطبيق لفئة معينة من المعادلات التفاضلية، أي المعادلات التفاضلية التي يكون فيها الجانب الأيمن $R(x)$ حلاً لمعادلة تفاضلية متجانسة ذات عوامل ثابتة.

وفي هذا البند سندرس طريقتين لحل المعادلات التفاضلية غير المتجانسة وليس عليهما أي قيود وفي الحقيقة يمكن تطبيقهما على المعادلات التفاضلية الخطية ذات العوامل المتغيرة.

وسنقدم أولاً طريقة اختزال الرتبة.

طريقة اختزال الرتبة (Reduction of Order)

نعتبر المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الثانية

$$y'' + Py' + qy = R \qquad (1)$$

نفرض أن y_1 تحقق المعادلة التفاضلية المتجانسة:

$$y'' + Py' + qy = 0 \qquad (2)$$

والآن نفرض أن

$$y = y_1 v \qquad (3)$$

يحقق المعادلة (1) حيث أن v متغير تابع.

ومن المعادلة (3) نجد أن:

$$y' = y_1 v' + y_1' v$$

و

$$y'' = y_1 v'' + y_1' v' + y_1' v' + y_1'' v$$

وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على الصورة التالية:

$$y_1v'' + 2y_1'v' + y_1''v + P(y_1v' + y_1'v) + qy_1v = R(x)$$

وبترتيب المعادلة السابقة حسب رتبة v نجد أن:

$$y_1v'' + 2(y_1' + Py_1)v' + (y_1'' + Py_1' + qy_1)v = R(x) \qquad (4)$$

ولكن $y_1'' + Py_1' + qy_1 = 0$ لأن y_1 يحقق المعادلة الأصلية

المعادلة (4) تختزل إلى الصورة التالية:

$$y_1v'' + 2(y_1' + Py_1)v' = R \qquad (5)$$

والآن نفرض أن $w = v'$

وبذلك يمكن كتابة المعادلة (5) كما يلي:

$$y_1w' + 2(y_1' + Py_1)w = R$$

والمعادلة الأخيرة خطية ومن الرتبة الأولى في w ويمكن إيجاد الحل بالطريقة المعتادة (العامل التكاملي).

وسنوضح طريقة اختزال الرتبة بالمثالين التاليين:

مثال 1

أوجد حل المعادلة $(D^2 + 1)y = cscx$

الحل

حل المعادلة التفاضلية المتجانسة:

$$(D^2 + 1)y = 0$$

يكتب كما يلي: $y = c_1cosx + c_2sinx$

ونستطيع اختيار أحد الحلين $sinx$ أو $cosx$ ونفرض أن $y = v\ cosx$ وهكذا

$$y' = -v\ sinx + v'cosx$$

$$y'' = -v\ cosx - v'sinx - v'sinx + v''cosx$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن:

$$-v\ cosx - 2v'sinx + v''cos\ x + v\ cos\ x = csc\ x$$

أو

$$v''cosx - 2v'sinx = cscx$$

ويمكن كتابة المعادلة السابقة كما يلي:

$$v'' - 2v'tan\ x = csc\ x\ sec\ x$$

ونفرض أن $w = v'$

وبذلك $w' - (2tan\ x)w = csc\ x\ sec\ x$

والمعادلة الأخيرة خطية ومن الرتبة الأولى ويمكن إيجاد الحل بطريقة العوامل التكاملية

$$\mu = e^{-2\int tan\ x\ dx}$$

$$= cos^2x$$

والآن بالضرب في العامل التكاملي نجد أن:

$$cos^2w' - 2sin\ x\ cos\ x\ w = cot\ x$$

أو

$$d(cos^2xw) = cot\ x$$

وبتكامل الطرفين نجد أن:

$$cos^2 x w = \int cot\ x dx$$
$$= ln|sin\ x|$$

أي أن:

$$w = sec^2 x\ ln|sinx|$$

ولكن $w = v'$ ومنها نجد أن:

$$v = \int w dx = \int sec^2 x\ ln|sin\ x| dx$$

ويمكن كتابة التكامل على الصورة التالية:

$$v = \int ln|sin\ x| d\ tanx$$
$$= tanx\ ln|sinx| - \int (tanx)\left(\frac{1}{sinx}(cosx)\right) dx$$
$$= tanx\ ln|sinx| - x$$

وهكذا يكتب الحل الخاص للمعادلة الأصلية يكتب كما يأتي:

$$y = y_1 v$$
$$= cos\ x(tanx\ ln|sinx| - x)$$
$$= sinx\ ln|sinx| - x\ cosx$$

وأخيراً يكتب الحل العام على الصورة التالية:

$$y = c_1 cosx + c_2 sinx - x\ cosx + sinx\ ln|sinx|$$

مثال 2

أوجد حل المعادلة التالية $(D^2 + 1)y = csc^2 x$

الحـل

من المثال السابق

$$y_c = c_1 cosx + c_2 sinx$$

نفرض أن الحل الخاص يكتب كما يأتي:

$$\begin{aligned} y &= vsinx \\ y' &= vcosx + v' sinx \\ y'' &= -vsinx + v' cosx + v' cosx + v'' sinx \\ &= -vsinx + 2v' cosx + v'' sinx \end{aligned}$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية نجد أن:

$$sinxv'' + 2cosxv' = csc^3 x$$

وبوضع $w = v'$ نحصل على المعادلة التالية:

$$sin\ x\ w' + 2cosxw' = csc^3 x$$

أو

$$w' + 2cotxw = csc^4 x \qquad (*)$$

والمعادلة الأخيرة خطية ومن الرتبة الأولى ويمكن إيجاد الحل بطريقة العوامل التكاملية

$$\mu = e^{2\int cot\ x\ dx} = sin^2 x$$

وبضرب المعادلة (*) في العامل التكاملي نحصل على العلاقة التالية:

$$sin^2 xw' + 2cos\ x\ sin\ x\ w = csc^2 x$$

المعادلة السابقة يمكن كتابتها كما يلي:

$$d(sin^2 xw) = csc^2 x$$

وبتكامل الطرفين نجد أن:

$$sin^2xw = \int csc^2xdx$$
$$= -cotx$$

أي أن:

$$w = -csc^2xcotx$$

ولكن

$$v' = w = -csc^2xcotx$$

وبتكامل الطرفين أيضاً

$$v = \int wdx = -\int csc^2xcotxdx$$
$$= \int cscx\ dcsc\ x$$
$$= \frac{1}{2}csc^2x$$

ويكتب الحل الخاص للمعادلة الأصلية كما يلي:

$$y = \frac{1}{2}(csc^2x)(sinx)$$
$$= \frac{1}{2}cscx$$

وهكذا يكتب الحل العام على الصورة التالية:

$$y = c_1cosx + c_2sinx + \frac{1}{2}cscx$$

طريقة تغاير البارامترات (الوسيطات)

أولاً نعتبر المعادلة التفاضلية غير المتجانسة

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = R(x) \qquad (1)$$

ونفرض أن الحل العام للمعادلة التفاضلية المتجانسة المناظرة للمعادلة السابقة

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

والآن نفرض أن الحل الخاص للمعادلة (1) كما يلي:

$$y = A(x)y_1 + B(x)y_2$$

وبتفاضل المعادلة السابقة:

$$y' = A'(x)y_1 + B'(x)y_2 + A(x)y_1' + B(x)y_2' \qquad (2)$$

والآن نفرض أن

$$A'(x)y_1 + B'(x)y_2 = 0 \qquad (3)$$

ومن المعادلة (2) نجد أن:

$$y'' = A(x)y_1'' + B(x)y_2'' + A'(x)y_1' + B'(x)y_2' \qquad (4)$$

وبالتعويض عن y' و y'' في المعادلة (1) نجد أن:

$$A(x)y_1'' + B(x)y_2'' + A'(x)y_1' + B'(x)y_2' + P(x) * A(x)y_1' + B(x)y_2')$$
$$+q(x)(A(x)y_1 + B(x)y_2) = R(x)$$

أو

$$A(y_1'' + Py_1' + qy_1) + B(y_2'' + Py_2' + y_2) + A'y_1' + B'y_2' = R(x)$$

ولكن y_1 وy_2 يحققان المعادلة المتجانسة المناظرة للمعادلة (1) إذن المعادلة الأخيرة تختزل إلى الصورة التالية:

$$A'y_1' + B'y_2' = R(x) \qquad (5)$$

وبحل المعادلتين (3) و(5) نحصل على A' و B' وهكذا يمكن إيجاد A وB بتكامل A' وB'.

مثال 1

أوجد حل المعادلة $(D^2 - 3D + 2)y = sin(e^{-x})$

الحــل

المعادلة المميزة هي

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

أو

$$(m-1)(m-2) = 0$$

ومنها $m = 1$ و$m = 2$

أي أن

$$y_c = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

ونفرض أن الحل الخاص للمعادلة الأصلية

$$y = Ae^x + Be^{2x}$$

وبالتعويض في المعادلتين (3) و(5) نجد أن:

$$A'e^x + B'e^{2x} = 0 \qquad (1)$$

$$A'e^x + 2B'e^{2x} = sin(e^{-x}) \qquad (2)$$

وبضرب المعادلة (1) في -1 والجمع مع المعادلة (2) نجد أن

$$B'e^{2x} = sin(e^{-x})$$

وبتكامل المعادلة السابقة نجد أن:

$$\begin{aligned} B &= \int e^{-2x} sin(e^{-x}) dx \\ &= \int e^{-x} dcos(e^{-x}) \\ &= e^{-x} cos(e^{-x}) - \int cos(e^{-x}) de^{-x} \\ &= e^{-x} cos(e^{-x}) - sin(e^{-x}) \end{aligned}$$

وبضرب المعادلة (1) في 2− وجمعها مع المعادلة (2) نحصل على:

$$-A'e^{x} = sin(e^{-x})$$

ومنها

$$A = -\int e^{-x} sin(e^{-x})dx$$
$$= \int sin(e^{-x})de^{-x}$$
$$= -cos(e^{-x})$$

وهكذا يكتب الحل العام على الصورة التالية:

$$y = c_1e^{x} + c_2e^{2x} - e^{2x}sin(e^{-x})$$

مثـال 2

أوجد حل المعادلة $y'' + y = secx\ cscx$

الحـل

الحل العام للمعادلة المتجانسة: $y'' + y = 0$

يكتب كما يلي: $y_c = c_1cosx + c_2sinx$

ونفرض أن الحل الخاص للمعادلة الأصلية:

$$y = Acosx + Bsinx$$

وبالتعويض في المعادلتين (3) و(5) نجد أن:

$$A'cosx + B'sinx = 0$$

و

$$-A'sinx + B'cosx = secxcscx$$

وبحل المعادلتين السابقتين نحصل على:

$$A' = -secx \Longrightarrow A = -ln|secx + tanx|$$

كذلك

$$B' = cscx \Longrightarrow B = \int cscxdx$$
$$= -ln|cscx + cotx|$$

وهكذا يمكن كتابة الحل العام على الصورة التالية:

$$y = y_c - cosx\ ln|sec\ x + tanx| - sinx\ ln\ |cscx + cotx|$$

مثـال 3

أوجد حل المعادلة التالية: $y'' + y = csc^3xcotx$

الحـل

المعادلة المميزة للمعادلة المتجانسة $y'' + y = 0$

تكتب كما يأتي: $m^2 + 1 = 0$

ومنها

$$y_c = c_1cosx + c_2sinx$$

ونفرض أن الحل الخاص للمعادلة الأصلية يكتب كما يلي:

$$y = Acosx + Bsinx$$

وبحل المعادلتين التاليتين معاً:

$$A'cosx + B'sinx = 0$$
$$-A'sinx + B'cosx = csc^3cotx$$

نحصل على:

$$A' = -csc^3x \ cotx \ sinx$$
$$= -csc^2x \ cotx$$

ومنها

$$A = \int csc^2xcotxdx$$
$$= \int cotxdcotx$$
$$= \frac{1}{2}cot^2x$$

وكذلك

$$B' = csc^3xcotxcosx$$
$$= csc^2xcot^2x$$

ومنها

$$B = \int csc^2xcot^2xdx$$
$$= -\int cot^2xdcotx$$
$$= -\frac{1}{3}cot^3x$$

وهكذا يكتب الحل على الصورة التالية:

$$y_p = \frac{1}{2}cot^2xcosx - \frac{1}{3}cot^3xsinx$$
$$= \frac{1}{2}cot^2xcosx - \frac{1}{3}cot^2xcosx$$
$$= \frac{1}{6}cot^2xcosx$$

ويكتب الحل العام على الصورة التالية:

$$y = y_c + \frac{1}{6}cot^2x \ cos \ x$$

تمارين 6.7

أوجد حل المعادلات التالية:

1) $(D^2-1)y = 2e^{-x}(1+e^{-2x})^{-2}$

2) $(D^2-1)y = secx$

3) $y'' + 4y' + 3y = sin(e^x)$

4) $(D^2-3D+2)y = cos(e^{-x})$

5) $(D^2+1)y = tan^2x$

6) $(D^2-3D+2)y = (1+e^{2x})^{-\frac{1}{2}}$

7) $(D^2-3D+2)y = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

8) $(D^2+1)y = sec^4x$

9) $(D^2-3D+2)y = \dfrac{e^{2x}}{(1+e^{2x})}$

7.7 تحويل لابلاس (The Laplace Transform)

التحويل اللابلاسي له أهمية كبيرة في حل مسائل القيمة الابتدائية الخطية ذات العوامل الثابتة، ويعتبر حالة خاصة من التحويل التكاملي الذي يعرف كما يلي:

$$T\{F(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} k(s,t)F(t)dt = f(s) \qquad (1)$$

والدالة $k(s,t)$ تسمى نواة التحويل (kernel). اختيارات مختلفة للدالة $k(s,t)$ تؤدي إلى تحويلات خاصة، والتحويل الذي يعرف باختيار الدالة على الصورة التالية:

$$k(t,s) = \begin{cases} 0 & ; \quad t > 0 \\ e^{-st} & ; \quad t \geq 0 \end{cases}$$

يسمى التحويل اللابلاسي أو تحويل لابلاس.

وهكذا التحويل اللابلاسي للدالة $F(t)$ يرمز له بالرمز $L\{F(t)\}$ ويعرف كما يلي:

$$L\{F(t)\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st}F(t)dt = f(s) \qquad (2)$$

حيث أن $S > S_0$ (S_0 مثبت).

وتسمى الصورة السابقة المؤثر اللابلاسي أيضاً.

والتحويل اللابلاسي مثل المؤثر التكاملي خطي أي أن:

$$L\{c_1F_1(t) + c_2F_2(t)\} = c_1L\{F_1(t)\} + c_2L\{F_2(t)\}$$

التحويل اللابلاسي للدوال الابتدائية

التحويل اللابلاسي لمعظم الدوال الابتدائية يمكن إنجازه باستخدام التعريف (2) ومن المهم جداً أن يكون تحويل الدوال الابتدائية مسألة مألوفة حتى يمكن حل مسائل القيمة الابتدائية بجدارة.

مثـال 1

أوجد $L\{sin\ kt\}$

الحـل

بتطبيق المعادلة (2) نجد أن:

$$L\{sin\ kt\} = \int_0^\infty e^{-st} sinkt\ dt$$

المسألة الآن مسألة تكامل عادية ويمكن إجراء عملية التكامل بالطريقة المألوفة:

$$\int_0^\infty e^{-st} sin\ kt\ dt = -\frac{1}{s}\int_0^\infty sin\ kt\ de^{-st}$$

$$= -\frac{1}{s}\left(e^{-st} sin\ kt\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-st} dsin\ kt \right)$$

$$= \frac{k}{s}\int_0^\infty e^{-st} cos\ kt\ dt$$

$$\int_0^\infty e^{-st} sin\ kt\ dt = \frac{k}{s}\int_0^\infty cos\ kt\ dt$$

وبالتكامل بالتجزئية مرة أخرى:

$$= -\frac{k}{s^2}\int_0^\infty cos\ kt\ de^{-st}$$

$$= -\frac{k}{s^2}\left(cos\ kte^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-st} sin\ kt\ dt \right)$$

$$= -\frac{k}{s^2}\left(-1 + k\int_0^\infty e^{-st} sinkt\ dt \right)$$

وهكذا

$$\left(1 + \frac{k^2}{s^2}\right)\int_0^\infty e^{-st} sin\ kt\ dt = \frac{k}{s^2}$$

ومنها
$$\int_0^\infty e^{-st} sinktdt = \frac{k}{s^2} \cdot \frac{s^2}{s^2+k^2}$$
$$= \frac{k}{s^2+k^2}$$

أي أن
$$L\{sin\ kt\} = \frac{k}{s^2+k^2}$$

وبالطريقة نفسها يمكن برهان ما يأتي:

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \text{ و } L\{cos\ kt\} = \frac{s}{s^2+k^2}$$

مثـــال 2

أوجد التحويل اللابلاسي للدالة $H(t)$ حيث أن:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 < t < 1 \\ t & ; \quad 1 < t < 2 \\ 0 & ; \quad t > 2 \end{cases}$$

الحــل

حسب التعريف (2) نجد أن:

$$L\{H(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} H(t)dt$$
$$= \int_1^2 e^{-st} tdt$$

ويمكن كتابة التكامل السابق كما يلي:

$$= -\frac{1}{s}\int_1^2 tde^{-st}$$
$$= -\frac{1}{s}\left(te^{-st}\Big|_1^2 - \int_1^2 e^{-st}dt \right)$$

$$= -\frac{1}{s}\left(2e^{-2s} - e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-st}\Big|_1^2\right)$$

$$= -\frac{1}{s}\left(2e^{-2s} - e^{-s} + \frac{1}{s}(e^{-2s} - e^{-s})\right)$$

$$= \frac{1}{s}(e^{-s} - 2e^{-2s}) + \frac{1}{s^2}(e^{-2s} - e^{-s})$$

حيث أن $s > 0$

وقبل دراسة التحويل اللابلاسي للمشتقات سنقدم التعريفات التالية:

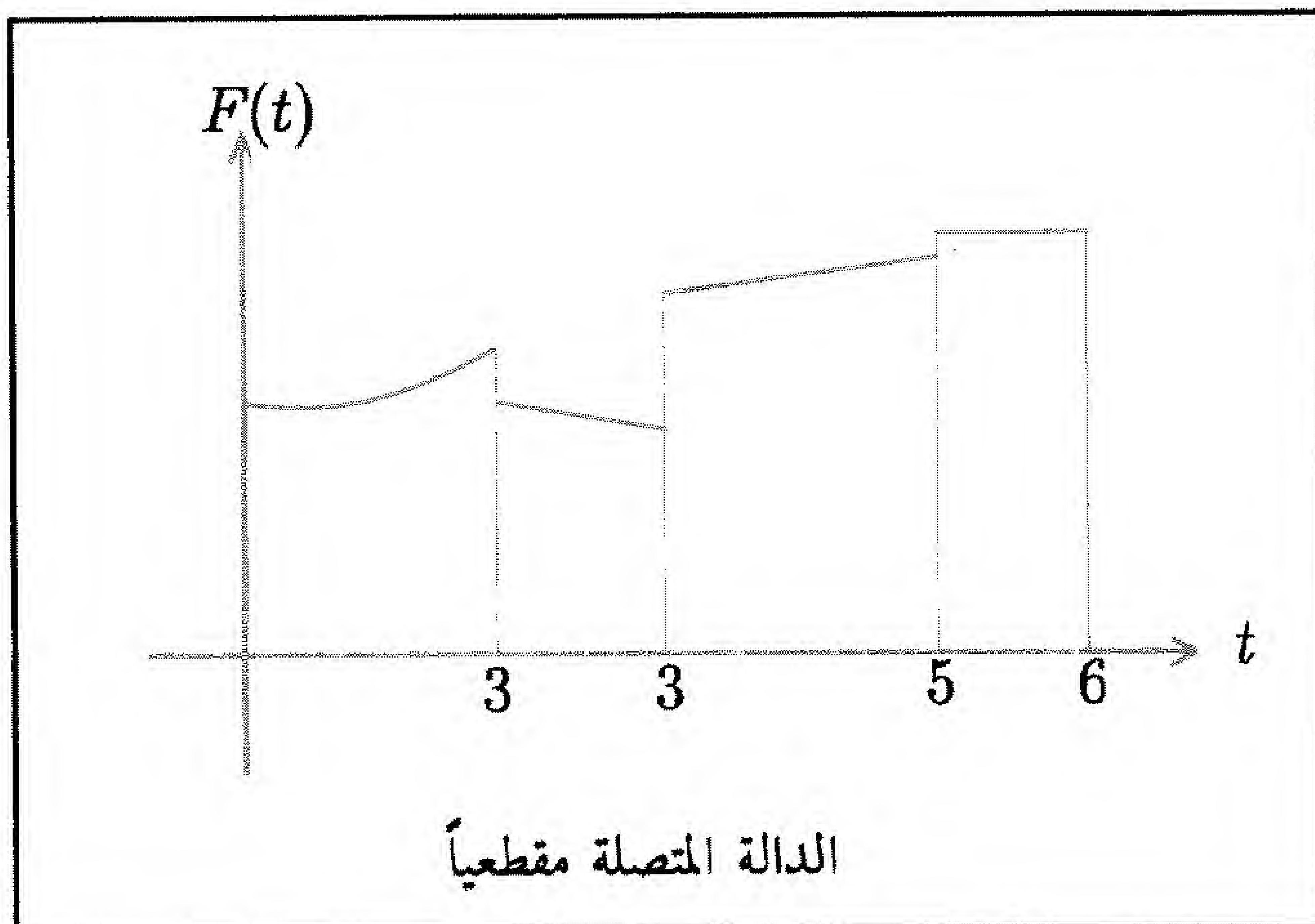
1) الدوال المتصلة مقطعياً

الدالة $F(t)$ متصلة مقطعياً في الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا كانت نفس الفترة قابلة للتجزئة إلى عدد نهائي من الفترات الجزئية $[c, d]$ حيث في كل فترة جزئية

أ) الدالة $F(t)$ متصلة في الفترة المفتوحة (c, d).

ب) نهاية الدالة $F(t)$ عندما تؤول t إلى كل من نقطتي نهاية الفترة تكون موجودة أي أن $\lim_{t\to d^-} F(t)$ و $\lim_{t\to c^+} F(t)$ موجودتان.

والشكل التالي يعبر عن الدالة المتصلة مقطعياً في الفترة المغلقة $[0, 6]$.



الدالة المتصلة مقطعياً

2) الدوال ذات الرتبة الأسية

الدالة $F(t)$ ذات رتبة أسية عندما $t \to \infty$ إذا كانت المقادير الثابتة b, M وt_0 موجودة حيث أن:

$$|F(t)| < Me^{bt} \text{ لكل } t \geq t_0$$

أو

$$F(t) = O(e^{bt})$$

أي أن $F(t)$ ذات الرتبة e^{bt} عندما $t \to \infty$

نظرية 1

إذا كان $\int_0^{t_0} e^{-st}F(t)$ موجوداً لكل عدد نهائي موجب t_0 وإذا كانت $F(t)$ ذات رتبة أسية أي أن $F(t) = O(e^{bt})$ عندما $t \to \infty$ فإن التحويل اللابلاسي

$$L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}F(t)dt = f(s)$$

موجود لكل $s > b$.

نظرية 2

إذا كانت الدالة $F(t)$ متصلة في كل فترة نهائية حيث أن $t \geq 0$ وإذا كانت $F(t)$ ذات رتبة أسية فإن التحويل اللابلاسي $L\{F(t)\}$ موجود لكل $s > b$

وإذا كان المقدار الثابت b موجوداً حيث أن النهاية

$$\lim_{t \to \infty} [e^{-bt}|F(t)|]$$

موجودة، فإن الدالة $F(t)$ ذات رتبة أسية.

الدوال من الفصل A

الدالة $F(t)$ من الفصل A إذا كانت

أ) متصلة مقطعياً في كل فترة نهائية حيث أن $t \geq 0$

ب) ذات رتبة أسية عندما $t \to \infty$

وهكذا يمكن إعادة صياغة النظرية (2) كما يلي:

إذا كانت $F(t)$ دالة من الفصل A، فإن $L\{F(t)\}$ يكون موجوداً.

التحويل اللابلاسي للمشتقات

نظرية 3

إذا كانت الدوال $F(t), F'(t), ..., F^{(n-1)}$ متصلة لكل $t \geq 0$ وذات رتبة أسية عندما $t \to \infty$ وإذا كانت $F^{(n)}(t)$ من الفصل A، فإن:

$$L\{F(t)\} = f(s)$$

وهذا يتضمن

$$L\{F^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} F^{(k)}(0)$$

وهكذا

$$L\{F^{(3)}(t)\} = s^3 f(s) - s^2 F(0) - sF'(0) - F''(0)$$

و

$$L\{F^{(4)}(t)\} = s^4 f(s) - s^3 F(0) - s^2 F'(0) - sF''(0) - F^{(3)}(0)$$

وتعتبر النظرية السابقة الأساس في تطبيق التحويل اللابلاسي لحل مسائل

القيمة الابتدائية حيث أن النظرية تمكننا من تحويل المعادلة التفاضلية إلى معادلة جبرية.

مثـال 3

بيِّن أن $L\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$

الحـل

$$L\{F'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F'(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}dF(t)$$

$$= e^{-st}F(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty F(t)de^{-st}$$

$$= -F(0) + s\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$$

$$= sf(s) - F(0)$$

ملاحظة

يمكن برهان النظرية (3) بصورة مماثلة للمثال السابق ويترك ذلك كتمرين للقارىء.

ويستحسن حل التمارين (1 – 10) قبل الانتقال إلى دراسة الصورة العكسية للتحويل اللابلاسي.

الصورة العكسية لتحويل لابلاس

كما سبق، التحويل اللابلاسي للدالة $F(t)$ يكتب على الصورة التالية:

$$L\{F(t)\} = f(s)$$

الدالة $F(t)$ تسمى الصورة العكسية للتحويل اللابلاسي وتكتب كما يلي:

$$F(t) = L^{-1}\{f(s)\}$$

وكمثال على ذلك التحويل اللابلاسي للدالة $sinkt$ يساوي $\frac{k}{s^2+k^2}$ والصورة العكسية للتحويل اللابلاسي للدالة $\frac{k}{s^2+k^2}$ هي $sinkt$، ولعل سهولة هذا المثال تأتي من علمنا مسبقاً بالتحويل اللابلاسي للدالة $sinkt$

نظرية 4

إذا كان c_1 و c_2 مقدارين ثابتين، فإن:

$$L^{-1}\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\} = c_1 L^{-1}\{f_1(s)\} + c_2 L^{-1}\{f_2(s)\}$$

أي أن معكوس التحويل مؤثر خطي.

ويترك البرهان كتمرين للقارىء.

نظرية 5

$$L^{-1}\{f(s)\} = e^{-at} L^{-1}\{f(s-a)\}$$

على الرغم من أن النظرية السابقة بسيطة جداً فإن لها أهمية كبيرة في إيجاد الصورة العكسية للتحويل اللابلاسي.

البرهان

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$$

ومنها

$$\begin{aligned}f(s-a)&=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}F(t)dt\\&=\int_0^\infty e^{-st}[e^{at}F(t)]dt\\&=L\{e^{at}F(t)\end{aligned}$$

أي أن

$$L^{-1}\{f(s-a)\}=e^{at}\{F(t)\}$$

ولكن

$$F(t)=L^{-1}\{f(s)\}$$

وهكذا

$$L^{-1}\{f(s-a)\}=e^{at}L^{-1}\{f(s)\}$$

مثـال 4

أوجد $L^{-1}\left\{\frac{1}{S^2+2s+10}\right\}$

الحـل

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{S^2+2s+10}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(S+1)^2+9}\right\}$$

وبتطبيق النظرية (5) نجد أن:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{S+1)^2+9}\right\}=e^{-t}L^{-1}\left\{\frac{1}{S^2+9}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}e^{-t}sin3t$$

مثــال 5

أوجد $$L^{-1}\left\{\frac{3s}{S^2+4s+13}\right\}$$

الحــل

$$L^{-1}\left\{\frac{3s}{S^2+4s+13}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{3s}{(S+2)^2+9}\right\}$$

$$=3L^{-1}\left\{\frac{s}{(S+2)^2+9}\right\}$$

$$=3L^{-1}\left\{\frac{s+2-2}{(S+2)^2+9}\right\}$$

$$=3\left[L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(S+2)^2+9}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{2}{(S+2)^2+9}\right\}\right]$$

$$=3[e^{-2t}cos3t-\tfrac{2}{3}e^{-2t}sin3t]$$

$$=3e^{-2t}cos3t-2e^{-2t}sin3t$$

ويمكن الحصول على النتيجة نفسها باستخدام طريقة الكسور الجزئية.

مثـال 6

أوجد $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{S^2+4s+4}\right\}$

الحـل

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{S^2+4s+4}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{s}{(S+2)^2}\right\}$$

وبتطبيق النظرية (5) نجد أن:

$$L^{-1}\left\{\frac{S}{(S+2)^2}\right\}=e^{-2t}L^{-1}\left\{\frac{S-2}{S^2}\right\}$$

$$=e^{-2t}\left[L^{-1}\left\{\frac{1}{S}\right\}-2L^{-1}\left\{\frac{1}{S^2}\right\}\right]$$

$$=e^{-2t}(1-2t)$$

مثـال 7

بيّن أن: $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(S+a)^{n+1}}\right\}=\dfrac{t^n e^{-at}}{n!}$

الحـل

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(S+a)^{n+1}}\right\}=e^{-at}L^{-1}\left\{\frac{1}{S^{n+1}}\right\}$$

$$=\frac{1}{n!}e^{-at}t^n$$

مثــال 8

أوجد $$L^{-1}\left\{\frac{s^2-6}{S^3+4S^2+3S}\right\}$$

الحــل

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2-6}{S^3+4s^2+3s}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{s^2-6}{s(s^2+3)(s+1)}\right\}$$

ولتبسيط الدالة القياسية يمكن استخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{s^2-6}{s(s+3)(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+3}+\frac{C}{s+1}$$

ويترك للقارىء أن يبين:

$$C=\frac{5}{2} \text{ و } B=\frac{1}{2}, A=-2$$

وبذلك يمكن كتابة الدالة القياسية كما يلي:

$$\frac{s^2-6}{s(+3)(s+1)}=\frac{-2}{s}+\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{s+3}+\left(\frac{5}{2}\right)\frac{1}{s+1}$$

وهكذا

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2-6}{s(s+3)(s+1)}\right\}=-2L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}+\frac{5}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}$$

$$=-2+\frac{1}{2}e^{-3t}+\frac{5}{2}e^{-t}$$

تمارين 7.7

برهن على ما يأتي:

1) $L\{e^{kt}\} = \frac{1}{s-k}$ 2) $L\{1\} = \frac{1}{s}$ 3) $L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

4) $L\{sinhkt\} = \frac{s}{s^2-k^2}$ حيث $s > |k|$

5) $L\{coshkt\} = \frac{s}{s^2-k^2}$ حيث $s > |k|$

أوجد ما يأتي:

6) $L(t^3 - t^2 + 3t)$ 7) $L(e^{-2t} + 4e^{-3t})$

8) $L(cos^2kt)$ 9) $L(sin^2kt)$

10) $L(e^{-at} - e^{-bt})$

أوجد معكوس لابلاس ($L^{-1}\{F(s)\}$) لكل من:

11) $\frac{2s-3}{s^2-4s+8}$ 12) $\frac{s^2}{(s-1)^4}$

13) $\frac{s+1}{s^2+6s+2}$ 14) $\frac{s^2-6}{s^3+4s^2+3s}$

15) $\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$ حيث أن $a^2 \neq b^2$ و $ab \neq 0$

16) $\frac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$ حيث أن $a^2 \neq b^2$ و $ab \neq 0$

17) $\frac{4s+4}{s^2(s-2)}$ 18) $\frac{3s^3+1}{s(s+1)^2}$

8.7 مسائل القيمة الابتدائية (Initial value problems)

مؤثر لابلاس يحول المعادلة التفاضلية الخطية ذات العوامل الثابتة إلى معادلة جبرية بدلالة دالة التحويل $f(s)$. وإذا كان من الممكن إيجاد الصورة العكسية لمؤثر لابلاس، أي للدالة $f(s)$، فإنه يمكن الحصول على حل المعادلة التفاضلية الأصلية. وطريقة لابلاس يمكن تطبيقها بسهولة إذا كانت المعادلة التفاضلية وشروطها الابتدائية مناسبة. وإذا كان غير ذلك، فإن العمليات الجبرية يمكن أن تكون معقدة ومن المحتمل أن يفضل القارىء الطرق السابقة.

وقبل دراسة الأمثلة وحل التمارين يفضل مراجعة الكسور الجزئية والتي سنستخدمها بدون ذكر التفاصيل.

مثـال 9

أوجد حل مسألة القيمة الابتدائية التالية:

$$y''(t) + y(t) = 0$$

حيث أن

أ) $y(0) = 0$ عندما $y'(0) = -2$ ب) $y(0) = 0$ عندما $y'(0) = \pi$

الحـل

بأخذ مؤثر لابلاس للطرفين نجد أن:

$$L\{y'' + y\} = 0$$

أو

$$L\{y''\} + L\{y\} = 0$$

ومنها $s^2 L\{y\} - sy(0) - y'(0) + L\{y\} = 0$

وبتطبيق الشروط الابتدائية تختزل المعادلة السابقة إلى الصورة التالية:

$$(s^2+1)L\{y\} = -2$$

أو
$$L\{y\} = \frac{-2}{s^2+1}$$

وبأخذ المؤثر العكسي للطرفين نجد أن:

$$y = L^{-1}\left\{\frac{-2}{s^2+1}\right\}$$
$$= -2sint$$

وهذا يعني أن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية يكتب كما يأتي:

$$\boxed{y = -2sint}$$

ويترك (ب) كتمرين للقارىء.

مثـــال 10

أوجد حل المعادلة $y''(t) - y(t) = 4cost$

حيث أن $y(0) = 0$ و $y'(0) = 1$

الحـــل

بتطبيق مؤثر لابلاس على المعادلة التفاضلية نجد أن:

$$L\{y''(t)\} - L\{y(t)\} = 4L\{cost\}$$

ومنها
$$s^2L\{y(t)\} - sy(0) - y'(0) - L\{y(t)\} = \frac{4s}{s^2+1}$$

وبتطبيق الشروط الابتدائية نحصل على الصورة التالية:

$$(s^2-1)L\{y(t)\} = \frac{4s}{s^2+1} + 1$$

أو

$$L\{y(t)\} = \frac{1}{s^2-1} + \frac{4s}{(s^2-1)(s^2+1)}$$

وبأخذ معكوس التحويل للطرفين نحصل على:

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{4s}{(S^2-1)(s^2\ +1)}\right\}$$

ويمكن استخدام طريقة الكسور الجزئية لتجزئة الدالتين القياسيتين $\frac{1}{s^2-1}$ و $\frac{4s}{(S^2-1)(s^2\ +1)}$ لاحظ أن:

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{(s-1)(s+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1}$$

وبضرب الطرفين في s^2-1 نجد أن:

$$1 = A(s+1) + B(sy=01)$$

ومنها نجد أن:

$$B = -\tfrac{1}{2} \text{ و } A = \frac{1}{2}$$

وباتباع طريقة مشابهة:

$$\frac{4s}{(s-1)(s+1)(s^2\ +1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{Cs+D}{s^2+1}$$

ويترك للقارىء أن يبين أن:

$$D = 0 \text{ و } C = -2, B = 1, A = 1$$

وهكذا

$$L\{y(t)\} = \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} - \frac{2s}{s^2+1}$$

$$= \frac{3}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} - \frac{2s}{s^2+1}$$

وبأخذ المؤثر العكسي للتحويل اللابلاسي نجد أن:

$$y(t) = \frac{3}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} - 2sint$$

ويمكن كتابة الحل الخاص $y(t)$ كما يلي:

$$y(t) = e^t + e^{-t} + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) - 2sint$$

أو

$$= 2cosht + \frac{1}{2}sinht - 2sint$$

8.7 تمارين

استخدم طريقة لابلاس لحل المعادلات التفاضلية التالية:

1) $x''(t) - 4x'(t) + x(t) = 4e^{2t}$ حيث أن $x(0) = -1$ و $x'(0) = -4$

2) $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 4t^2$ حيث أن $x(0) = 0$ و $x'(0) = 0$

3) $y''(t) + y'(t) - 2y(t) = -4$ حيث أن $y(0) = 2$ و $y'(0) = 3$

4) $y'' + y = e^{-t}$ حيث أن $y'(0) = y(0) = 0$

5) $y''(x) - y(x) = 4e^x$ حيث أن $y(0) = 0$ و $y'(0) = 0$

تمارين الفصل السابع

أوجد فئة حلول المعادلات التالية:

1) $(y^3+y+1)dx+x(x-3y^2-1)dy=0$

2) $(x^5-y^2)dx+2xydy=0$

3) $y^3sec^2xdx-(1-2y^2tanx)dy=0$

4) $xydx+(y^4-3x^2)dy=0$

5) $(5x+3e^y)dx+2xe^ydy=0$

6) $\frac{dy}{dx}=tanycotx-secycosx$

7) $(x^4-4x^2y^2-y^4)dx+4x^3ydy=0$ حيث $y(1)=2$

8) $(x+y-2)dx-(x-4y-2)dy=0$

9) $4dx+(x-y+2)^2dy=0$

10) $(x+y-2)dx-(x-4y-2)dy=0$

أوجد الحل العام للمعادلات التفاضلية التالية:

11) $(D^4-5D^2-6D-2)y=0$

12) $(D^4+3D^3+2D^2)y=0; y(0)=0, y'(0)=4,$
$y''(0)=-6, y'''(0)=14$

13) $(D^3+D^2-D-1)y=0; y(0)=1, y(2)=0$
وعندما $x\to\infty$ فإن $y\to 0$

14) $(D^2-4D+7)y=0$

$(D^5 + D^4 - 7D^3 - 11D^2 - 8D - 12)y = 0$ (15

$(D^3 + 3D^2 + 3D + 1)y = 0$ (16

$(D^4 + 5D^2 + 4)y = 0$ (17

$(D^4 + 2D^3 - 6D^2 - 16D - 8)y = 0$ (18

$y'' - 4y' + 3y = 2cosx + 4sinx$ (19

$y'' - y' - 2y = 6x + 6e^{-x}$ (20

استخدم طريقة اختزال الرتبة لإيجاد حل المعادلات التالية:

$(D^2 + 4)y = sinx$ (21

$(D^2 + 1)y = sec^3x$ (22

$(D^2 - 3D + 2)y = (1 + e^{2x})^{-\frac{1}{2}}$ (23

استخدم طريقة تغاير الوسيطات لإيجاد حل المعادلات التالية:

$(D^2 + 1)y = sec^3x$ (24

$(D^2 + 1)y = tanx$ (25

$(D^2 + 1)y = secxcscx$ (26

$(D^2 - 3D + 2)y = cos(e^{-x})$ (27

$(D^2 + 1)u = tan^2x$ (28

$y'' + y = csc^3xcotx$ (29

$y'' + y = sec^3xtanx$ (30

أوجد تحويلات لابلاس للدوال التالية:

$\sqrt{t}$ (31 $t^{\frac{5}{2}}$ (32

33) $t^2 sinkt$ 34) $coskt$

35) $coshkt$ 36) $sinhkt$

أوجد معكوس تحويل لابلاس لكل من:

37) $\frac{2s-3}{s^2-4s+8}$ 38) $\frac{3s}{s^2-4s+13}$

39) $\frac{s^2}{(s-1)^2}$ 40) $\frac{s}{(s+a)^2+b^2}$

41) $\frac{s^2}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$ حيث أن $a^2 \neq b^2$ و $ab \neq 0$

42) $\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$ حيث أن $a^2 \neq b^2$ و $ab \neq 0$

استخدم تحويل لابلاس لإيجاد حل المسائل التالية:

43) $x''(t) + x(t) = 6sin2t \; ; \; x(0) = 3 \; , \; x'(0) =$

44) $y''(x) + 9y(x) = 40e^x \; ; \; y(0) = 5 \; , \; y'(0) = -2$

45) $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 4cos2t \; ; \; x = 2 \; , \; x'(0) = 5$

46) $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 4e^{2t} \; ; \; x(0) = -1 \; , \; x' = -4$